

Formale Systeme II: Theorie (Sommer 2016) Übungsblatt „Dynamische Logik“

Aufgabe 1 Zur Einstimmung

(a) Gilt $p \rightarrow [\alpha]p \models [\beta^* ; ?p ; \alpha^*]$ für PDL?

Begründen Sie.

(b) Ist $[\alpha^* ; \beta^*]p \rightarrow [(\alpha \cup \beta)^*]p$ eine PDL-Tautologie?

Wie sieht es mit der umgekehrten Implikationsrichtung aus?

(Modifiziert gegenüber Originalversion des Blattes)

(c) Gilt $\mathbb{N} \models \forall x. \langle \text{while } x \neq 1 \text{ do if } \exists k. x=2k \text{ then } x := x/2 \text{ else } x := 3x + 1 \rangle x = 1$?

Vorsicht, ganz und gar nicht einfach. (Recherchiere „Collatz-Funktion“)

Aufgabe 2 Deduktionstheorem für modale Logik

Laut Vorlesung gilt das Deduktionstheorem nicht für die globale Schlussfolgerung von PDL (also $\psi \models^G \varphi \not\iff \models^G \psi \rightarrow \varphi$), aber es gilt: $\psi \models^G \varphi \iff \models^G [(\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_k)^*]\psi \rightarrow \varphi$ wobei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subseteq A$ die in φ auftretenden atomaren Programme sind.

(a) Gilt das Deduktionstheorem für die globale Schlussfolgerung für *modale* Aussagenlogik?

(Wenn nicht: Gegenbeispiel)

(b) Wenn nicht: Gibt es für jede Formel ψ eine Formel ψ' , so dass $\psi \models^G \varphi \iff \models^G \psi' \rightarrow \varphi$ für modallogische Aussagen?

Aufgabe 3 DL-Kalkül

Beweisen Sie mithilfe des vorgestellten weakest-precondition-Kalküls, dass für folgendes while-Programm

```
i := 1;
r := a;
while i < b do
  r := r + a;
  i := i + 1
```

unter der Vorbedingung $b > 0$ die Nachbedingung $r = a \cdot b$ erfüllt ist.

Aufgabe 4 Formalisierung der Endlichkeit

Sei die prädikatenlogische Signatur gegeben, die nur das einstellige Funktionssymbol f enthalte. Geben Sie eine Formel φ_{fn} der uninterpretierten FODL über dieser Signatur an, so dass gilt:

1. Wenn $D, I \models \varphi_{fn}$, dann ist das Universum D endlich **und**
2. für jedes endliche Universum D gibt es eine Interpretation I mit $D, I \models \varphi_{fn}$

Hinweis: Eine mögliche Lösung hat mit der Formalisierung von Erreichbarkeit zu tun.

Zur Erinnerung: Wegen des Kompaktheitsatzes gibt es keine prädikatenlogische Formel erster Stufe, die diese Eigenschaft hat.

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass die folgende PDL-Schlussregel korrekt ist:

$$\frac{\varphi \rightarrow [\pi]\varphi}{\varphi \rightarrow [\pi^*]\varphi}$$