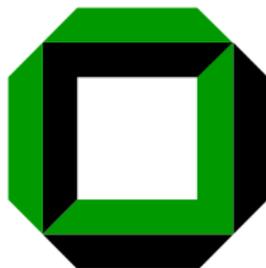


Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)



Winter 2008/2009



Hilbertkalkül

Axiome und Regeln

Axiome sind Schemata! x steht für eine Variable, t für einen Term,
 A, B, C stehen für Formeln.

Ax1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (Abschwächung)

Ax2: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (Verteilung von \rightarrow)

Ax3: $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ (Kontraposition)

Ax4: $\forall x A \rightarrow \{x/t\}(A)$ $\{x/t\}$ kollisionsfrei für A (Instantiierung)

Ax5: $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$ $x \notin \text{Frei}(A)$ (\forall -Verschiebung)

Mp:
$$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$$
 (Modus ponens)

Gen:
$$\frac{A}{\forall x A}$$
 (Generalisierung)



Vollständigkeit der PL1

GÖDEL1931

Theorem

Σ sei eine Signatur der PL1.

Dann ist \mathbf{H} über Σ korrekt und vollständig: für alle $M \subseteq \text{For}_\Sigma$, $A \in \text{For}_\Sigma$ gilt:

$$M \models A \iff M \vdash_{\mathbf{H}} A$$



Konsequenzen der Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem (Kompaktheitsatz)

Für beliebige $M \subseteq \text{For}_\Sigma$, $A \in \text{For}_\Sigma$ gilt:

$$M \models A$$

\Leftrightarrow

$E \models A$ für eine endliche Teilmenge $E \subseteq M$.



Konsequenzen der Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem (Kompaktheitsatz)

Für beliebige $M \subseteq \text{For}_\Sigma$, $A \in \text{For}_\Sigma$ gilt:

$$\begin{aligned} M \models A \\ \Leftrightarrow \\ E \models A \text{ für eine endliche Teilmenge } E \subseteq M. \end{aligned}$$

Theorem (Endlichkeitssatz)

Eine Menge $M \subseteq \text{For}_\Sigma$ hat genau dann ein Modell, wenn jede endliche Teilmenge von M ein Modell hat.



Konsequenzen der Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem (Kompaktheitsatz)

Für beliebige $M \subseteq \text{For}_\Sigma$, $A \in \text{For}_\Sigma$ gilt:

$$\begin{aligned} M \models A \\ \Leftrightarrow \\ E \models A \text{ für eine endliche Teilmenge } E \subseteq M. \end{aligned}$$

Theorem (Endlichkeitssatz)

Eine Menge $M \subseteq \text{For}_\Sigma$ hat genau dann ein Modell, wenn jede endliche Teilmenge von M ein Modell hat.

Der Endlichkeitssatz ist der Spezialfall $A = \mathbf{0}$ des Kompaktheitsatzes.



Beweis des Kompaktheitsatzes

$$M \models A$$



Beweis des Kompaktheitsatzes

$$M \models A$$

$$\Leftrightarrow M \vdash A \quad (\text{Korrektheit und Vollständigkeit})$$



Beweis des Kompaktheitsatzes

$$M \models A$$

$$\Leftrightarrow M \vdash A \quad (\text{Korrektheit und Vollständigkeit})$$

$$\Leftrightarrow E \vdash A \quad \text{für ein endliches } E \subseteq M$$



Beweis des Kompaktheitsatzes

$$M \models A$$

$$\Leftrightarrow M \vdash A \quad (\text{Korrektheit und Vollständigkeit})$$

$$\Leftrightarrow E \vdash A \quad \text{für ein endliches } E \subseteq M$$

Endlichkeit von Ableitungen



Beweis des Kompaktheitsatzes

$$M \models A$$

$$\Leftrightarrow M \vdash A \quad (\text{Korrektheit und Vollständigkeit})$$

$$\Leftrightarrow E \vdash A \quad \text{für ein endliches } E \subseteq M$$

Endlichkeit von Ableitungen

$$\Leftrightarrow E \models A \quad \text{für ein endliches } E \subseteq M$$



Beweis des Kompaktheitsatzes

$$M \models A$$

$$\Leftrightarrow M \vdash A \quad (\text{Korrektheit und Vollständigkeit})$$

$$\Leftrightarrow E \vdash A \quad \text{für ein endliches } E \subseteq M$$

Endlichkeit von Ableitungen

$$\Leftrightarrow E \models A \quad \text{für ein endliches } E \subseteq M$$

Korrektheit u. Vollständigkeit



Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe

Theorem

Es gibt *keine* Formel F der Prädikatenlogik erster Stufe, so daß für alle Strukturen \mathcal{M} gilt:

$$\mathcal{M} \models F \iff \mathcal{M} \text{ ist endlich.}$$



Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe

Theorem

Es gibt **keine** Formel F der Prädikatenlogik erster Stufe, so daß für alle Strukturen \mathcal{M} gilt:

$$\mathcal{M} \models F \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \text{ ist endlich.}$$



Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe

Theorem

Es gibt **keine** Formel F der Prädikatenlogik erster Stufe, so daß für alle Strukturen \mathcal{M} gilt:

$$\mathcal{M} \models F \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \text{ ist endlich.}$$



Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe

Theorem

Es gibt **keine** Formel F der Prädikatenlogik erster Stufe, so daß für alle Strukturen \mathcal{M} gilt:

$$\mathcal{M} \models F \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \text{ ist endlich.}$$

Beweis: Angenommen ein solches F existiert.



Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe

Theorem

Es gibt **keine** Formel F der Prädikatenlogik erster Stufe, so daß für alle Strukturen \mathcal{M} gilt:

$$\mathcal{M} \models F \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \text{ ist endlich.}$$

Beweis: Angenommen ein solches F existiert.

Wir definieren Hilfsformeln: $A_n = \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i < j \leq n} \neg(x_i \doteq x_j)$



Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe

Theorem

Es gibt **keine** Formel F der Prädikatenlogik erster Stufe, so daß für alle Strukturen \mathcal{M} gilt:

$$\mathcal{M} \models F \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \text{ ist endlich.}$$

Beweis: Angenommen ein solches F existiert.

Wir definieren Hilfsformeln: $A_n = \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i < j \leq n} \neg(x_i \doteq x_j)$

Offensichtlich gilt $\mathcal{M} \models A_n \Leftrightarrow \mathcal{M}$ hat mindestens n Elemente.



Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe

Theorem

Es gibt **keine** Formel F der Prädikatenlogik erster Stufe, so daß für alle Strukturen \mathcal{M} gilt:

$$\mathcal{M} \models F \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \text{ ist endlich.}$$

Beweis: Angenommen ein solches F existiert.

Wir definieren Hilfsformeln: $A_n = \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i < j \leq n} \neg(x_i \doteq x_j)$

Offensichtlich gilt $\mathcal{M} \models A_n \Leftrightarrow \mathcal{M}$ hat mindestens n Elemente.
Jede endliche Teilmenge von

$$\Gamma = \{F\} \cup \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ist erfüllbar, aber Γ selbst ist nicht erfüllbar.



Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe

Theorem

Es gibt **keine** Formel F der Prädikatenlogik erster Stufe, so daß für alle Strukturen \mathcal{M} gilt:

$$\mathcal{M} \models F \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \text{ ist endlich.}$$

Beweis: Angenommen ein solches F existiert.

Wir definieren Hilfsformeln: $A_n = \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i < j \leq n} \neg(x_i \doteq x_j)$

Offensichtlich gilt $\mathcal{M} \models A_n \Leftrightarrow \mathcal{M}$ hat mindestens n Elemente.
Jede endliche Teilmenge von

$$\Gamma = \{F\} \cup \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ist erfüllbar, aber Γ selbst ist nicht erfüllbar.

Widerspruch zum Endlichkeitssatz!

