# *Formale Systeme*

Prof. Dr. Bernhard Beckert

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)

Winter 2008/2009

# *Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe*

## Logische Zeichen:

Wie in der PL1: $(, ), \doteq, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.
*Variable:*

| | |
|---|---|
| *Var* = | *Ivar* $\cup$ *Mvar* (disjunkt) |
| *Ivar*: | *Individuenvariable* $v_0, v_1, \ldots$ |
| | Notation: $x, y, z, \ldots$ |
| *Mvar*: | *Mengenvariable* oder |
| | *einstellige Prädikatvariable* $M_0, M_1, \ldots$ |
| | Notation: $X, Y, Z, \ldots$ |

# *Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe*

## Logische Zeichen:

Wie in der PL1: $(, ), \doteq, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.
*Variable:*

| | |
|---|---|
| *Var* = | *Ivar* $\cup$ *Mvar* (disjunkt) |
| *Ivar*: | *Individuenvariable* $v_0, v_1, \ldots$ |
| | Notation: $x, y, z, \ldots$ |
| *Mvar*: | *Mengenvariable* oder |
| | *einstellige Prädikatvariable* $M_0, M_1, \ldots$ |
| | Notation: $X, Y, Z, \ldots$ |

Signatur $\Sigma = (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma)$ wie in PL1

# *Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe*

Logische Zeichen:

Wie in der PL1: $(,), \doteq, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.
*Variable:*

| | |
|---|---|
| $Var =$ | $Ivar \cup Mvar$ (disjunkt) |
| $Ivar$: | *Individuenvariable* $v_0, v_1, \ldots$ |
| | Notation: $x, y, z, \ldots$ |
| $Mvar$: | *Mengenvariable* oder |
| | *einstellige Prädikatvariable* $M_0, M_1, \ldots$ |
| | Notation: $X, Y, Z, \ldots$ |

Signatur $\Sigma = (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma)$ wie in PL1
Terme $\mathrm{Term}_\Sigma$ wie in PL1

# Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe (Forts.)

atomare Formeln:

$s \doteq t$ für Terme $s, t$
$p(t_1, \ldots, t_n)$ für $p \in P_\Sigma$, $\alpha_\Sigma(p) = n$, $t_i \in \mathrm{Term}_\Sigma$
$X(t)$ für Mengenvariable $X$ und Terme $t$

## *Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe (Forts.)*

atomare Formeln:

$s \doteq t$ für Terme $s, t$
$p(t_1, \ldots, t_n)$ für $p \in P_\Sigma$, $\alpha_\Sigma(p) = n$, $t_i \in \mathrm{Term}_\Sigma$
$X(t)$ für Mengenvariable $X$ und Terme $t$

Formeln $For^2_\Sigma$ enthält genau

# Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe (Forts.)

atomare Formeln:

$s \doteq t$ für Terme $s, t$
$p(t_1, \ldots, t_n)$ für $p \in P_\Sigma$, $\alpha_\Sigma(p) = n$, $t_i \in \mathrm{Term}_\Sigma$
$X(t)$ für Mengenvariable $X$ und Terme $t$

Formeln $For^2_\Sigma$ enthält genau

- alle atomaren Formeln
- $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$
- mit $A, B \in For^2_\Sigma, x \in Ivar, X \in Mvar$
  auch: $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$,
  $\forall x A$, $\exists x A, \forall X A, \exists X A$

# Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe (Forts.)

atomare Formeln:

$s \doteq t$ für Terme $s, t$
$p(t_1, \ldots, t_n)$ für $p \in P_\Sigma$, $\alpha_\Sigma(p) = n$, $t_i \in \mathrm{Term}_\Sigma$
$X(t)$ für Mengenvariable $X$ und Terme $t$

Formeln $For^2_\Sigma$ enthält genau

- alle atomaren Formeln
- $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$
- mit $A, B \in For^2_\Sigma, x \in Ivar, X \in Mvar$
  auch: $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$,
  $\forall x A$, $\exists x A, \forall X A, \exists X A$

Die Begriffe „freie Variable", „gebundene Variable", „Substitution", „kollisionsfreie Substitution", „Präfix", „Allabschluß", „Existenzabschluß" u.ä. werden entsprechend der PL1 gebildet.

# *Semantik der Prädikatenlogik 2. Stufe*

Zu einer Interpretation $\mathcal{D} = (D, I)$ sind Belegungen

$$\beta : \quad Ivar \rightarrow D \quad \text{und} \quad \gamma : \quad Mvar \rightarrow P(D)$$

zu betrachten ($P(D)$: Potenzmenge von $D$).

# *Semantik der Prädikatenlogik 2. Stufe*

Zu einer Interpretation $\mathcal{D} = (D, I)$ sind Belegungen

$$\beta: \quad \mathit{Ivar} \to D \quad \text{und} \quad \gamma: \quad \mathit{Mvar} \to P(D)$$

zu betrachten ($P(D)$: Potenzmenge von $D$).

Auswertung von Formeln:

# Semantik der Prädikatenlogik 2. Stufe

Zu einer Interpretation $\mathcal{D} = (D, I)$ sind Belegungen

$$\beta : \quad \mathit{Ivar} \to D \quad \text{und} \quad \gamma : \quad \mathit{Mvar} \to P(D)$$

zu betrachten ($P(D)$: Potenzmenge von $D$).

Auswertung von Formeln:

$$\mathit{val}_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(X(t)) = W \quad \Leftrightarrow \quad \mathit{val}_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(t) \in \gamma(X)$$

# Semantik der Prädikatenlogik 2. Stufe

Zu einer Interpretation $\mathcal{D} = (D, I)$ sind Belegungen

$$\beta : \quad \mathit{Ivar} \rightarrow D \quad \text{und} \quad \gamma : \quad \mathit{Mvar} \rightarrow P(D)$$

zu betrachten ($P(D)$: Potenzmenge von $D$).

Auswertung von Formeln:

$$\begin{array}{lcl} \mathit{val}_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(X(t)) = W & \Leftrightarrow & \mathit{val}_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(t) \in \gamma(X) \\ \mathit{val}_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\forall X A) = W & \Leftrightarrow & \text{für jedes } M \subseteq D \text{ gilt } \mathit{val}_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W \end{array}$$

# Semantik der Prädikatenlogik 2. Stufe

Zu einer Interpretation $\mathcal{D} = (D, I)$ sind Belegungen

$$\beta : \quad Ivar \rightarrow D \quad \text{und} \quad \gamma : \quad Mvar \rightarrow P(D)$$

zu betrachten ($P(D)$: Potenzmenge von $D$).

Auswertung von Formeln:

$$
\begin{aligned}
val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(X(t)) = W \quad &\Leftrightarrow \quad val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(t) \in \gamma(X) \\
val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\forall X A) = W \quad &\Leftrightarrow \quad \text{für jedes } M \subseteq D \text{ gilt } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W \\
val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\exists X A) = W \quad &\Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein } M \subseteq D \text{ mit } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W
\end{aligned}
$$

# *Modellbegriff*

$(D, I)$ heißt *Modell* von $A$ : $\quad \Leftrightarrow \quad val_{D,I,\beta,\gamma}(A) = W$ für alle $\beta, \gamma$.

# *Modellbegriff*

$(D, I)$ heißt *Modell* von $A :\quad \Leftrightarrow \quad val_{D,I,\beta,\gamma}(A) = W$ für alle $\beta, \gamma$.

$(D, I)$ ist Modell einer Formelmenge $M :\Leftrightarrow$
$(D, I)$ ist Modell jeder Formel in $M$.

# Modellbegriff

$(D, I)$ heißt *Modell* von $A :\quad \Leftrightarrow \quad val_{D,I,\beta,\gamma}(A) = W$ für alle $\beta, \gamma$.

$(D, I)$ ist Modell einer Formelmenge $M :\Leftrightarrow$
$(D, I)$ ist Modell jeder Formel in $M$.

$M \models A :\Leftrightarrow$ Jedes Modell von $M$ ist Modell von $A$

# *Modellbegriff*

$(D, I)$ heißt *Modell* von $A$ : $\quad \Leftrightarrow \quad val_{D,I,\beta,\gamma}(A) = W$ für alle $\beta, \gamma$.

$(D, I)$ ist Modell einer Formelmenge $M$ :⇔
$(D, I)$ ist Modell jeder Formel in $M$.

$M \models A$ :⇔ Jedes Modell von $M$ ist Modell von $A$

$A$ *allgemeingültig* :⇔ $\models A$

# *Modellbegriff*

$(D, I)$ heißt *Modell* von $A: \quad \Leftrightarrow \quad val_{D,I,\beta,\gamma}(A) = W$ für alle $\beta, \gamma$.

$(D, I)$ ist Modell einer Formelmenge $M :\Leftrightarrow$
$(D, I)$ ist Modell jeder Formel in $M$.

$M \models A :\Leftrightarrow$ Jedes Modell von $M$ ist Modell von $A$

$A$ *allgemeingültig* $:\Leftrightarrow \ \models A$

$A$ *erfüllbar* $:\Leftrightarrow \ \neg A$ ist nicht allgemeingültig.

# *Beispiele für PL2 Formeln*

- $\forall X(X(x) \leftrightarrow X(y))$
  Charakterisiert die Gleichheit $x \doteq y$.

# *Beispiele für PL2 Formeln*

- $\forall X(X(x) \leftrightarrow X(y))$
  Charakterisiert die Gleichheit $x \doteq y$.
- $\forall X((X(0) \wedge \forall y(X(y) \rightarrow X(s(y)))) \rightarrow \forall y X(y))$
  Das Induktionsschema der Peanoschen Axiome als Formel.

# *Kompaktheit*

*Theorem*

*Die PL2 ist nicht kompakt. D. h.:*

- *Es gibt eine Formelmenge $S$, so daß jede endliche Teilmenge von $S$ ein Modell hat $S$ selbst aber nicht.*

# Kompaktheit

*Theorem*

*Die PL2 ist nicht kompakt. D. h.:*

- *Es gibt eine Formelmenge $S$, so daß jede endliche Teilmenge von $S$ ein Modell hat $S$ selbst aber nicht.*

*Beweis*

Vokabular $\Sigma = \{s, 0, c\}$

$$\begin{array}{rcl} S & = & \{\forall X((X(0) \land \forall y(X(y) \to X(s(y)))) \to \forall y X(y))\} \cup \\ & & \{\neg(c \doteq \underbrace{s(\ldots s(}_{n \text{ mal}}0)\ldots) \mid n \geq 0\} \end{array}$$

# Kompaktheit

*Theorem*

*Die PL2 ist nicht kompakt. D. h.:*

- *Es gibt eine Formelmenge $S$, so daß jede endliche Teilmenge von $S$ ein Modell hat $S$ selbst aber nicht.*

*Beweis*

Vokabular $\Sigma = \{s, 0, c\}$

$$S = \{\forall X((X(0) \land \forall y(X(y) \to X(s(y)))) \to \forall y X(y))\} \cup \{\neg(c \doteq \underbrace{s(\ldots s(}_{n \text{ mal}} 0) \ldots) \mid n \geq 0\}$$

Aus $(D, I) = \mathcal{D} \models \forall X((X(0) \land \forall y(X(y) \to X(s(y)))) \to \forall y X(y))$ folgt $D = \{s^n(0) \mid n \geq 0\}$.

# Kompaktheit

*Theorem*

*Die PL2 ist nicht kompakt. D. h.:*

- *Es gibt eine Formelmenge S, so daß jede endliche Teilmenge von S ein Modell hat S selbst aber nicht.*

*Beweis*

Vokabular $\Sigma = \{s, 0, c\}$

$$S = \{\forall X((X(0) \land \forall y(X(y) \to X(s(y)))) \to \forall y X(y))\} \cup \{\neg(c \doteq \underbrace{s(\ldots s(}_{n \text{ mal}}0)\ldots) \mid n \geq 0\}$$

Aus $(D, I) = \mathcal{D} \models \forall X((X(0) \land \forall y(X(y) \to X(s(y)))) \to \forall y X(y))$ folgt $D = \{s^n(0) \mid n \geq 0\}$.

Jede endliche Teilmenge der Ungleichungen $\{c \neq s^n(0) \mid n \geq 0\}$ lässt sich noch erfüllen, die ganze Menge aber nicht mehr.

# *Axiomatisierbarkeit*

*Theorem*

*Für die Prädikatenlogik 2. Stufe kann es keinen korrekten und vollständigen Kalkül geben.*

*Beweis*

Der Begriff der Ableitbarkeit aus einem Kalkül $K$ ist stets kompakt, d. h.: Aus

$$S \vdash_K A$$

folgt stets

$$E \vdash_K A$$

für eine endliche Teilmenge $E \subseteq S$.

Die Existenz eines korrekten und vollständigen Kalküls stünde also im Widerspruch zu dem Gegenbeispiel zur Kompaktheit von PL2.

# *Endlichkeit*

Mit Quantoren über 2-stellige Relationen kann man auch die Endlichkeit des Grundbereichs durch eine Formel ohne nicht-logische Zeichen ausdrücken.

$$\begin{array}{ll} \mathit{Fin} & := \\ \forall U & ((\forall x \exists y U(x,y) \wedge \\ & \forall x \forall y \forall z (U(x,y) \wedge U(x,z) \rightarrow y \doteq z) \\ & \wedge \forall x \forall y \forall z (U(x,z) \wedge U(y,z) \rightarrow x \doteq y)) \\ & \rightarrow \forall y \exists x U(x,y)) \end{array}$$

$$(D, I) \models \mathit{Fin} \Leftrightarrow D \text{ ist endlich}$$

# *Endlichkeit*

Beweisidee

$(D, I)$ endlich

$\Leftrightarrow$ Jede injektive Funktion $F : D \rightarrow D$ ist auch surjektiv

$\Leftrightarrow$ Für jede Relation $R \subseteq D \times D$ gilt:
Wenn $R$ der Graph einer injektiven Funktion ist,
dann ist diese auch surjektiv.