UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
M. Ulbrich

Formale Systeme, WS 2008/2009

Übungsblatt 2

Dieses Übungsblattes wird in der Übung am 14.11.2008 besprochen.

Aufgabe 1

Zeigen Sie mithilfe des Resolutionskalküls

(a) die Unerfüllbarkeit der Formel

$$\{\{A, B, \neg C\}, \{\neg A\}, \{A, B, C\}, \{A, \neg B\}\} \ ,$$

(b) die Allgemeingültigkeit der Formel

$$(\neg B \land \neg C \land D) \lor (\neg B \land \neg D) \lor (C \land D) \lor B \ ,$$

(c) die Allgemeingültigkeit der Formel

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \ .$$

Aufgabe 2

Widerlegen Sie die Vollständigkeit einer Variante des Resolutionskalküls, bei der jede Klausel nur einmal zur Resolution verwendet werden darf.

Hinweis: Suchen Sie ein Gegenbeispiel (nicht ganz einfach!).

Aufgabe 3

Die lineare Resolution ist eine Variante der Resolution: Bei der Resolventenbildung muss eine der Elternklauseln entweder die Startklausel (eine zu Beginn frei gewählte Klausel) oder die Resolvente aus dem vorangegangenen Resolutionsschritt sein. Die jeweils andere Elternklausel kann frei gewählt werden.

Es gilt: Für jede unerfüllbare Klauselmenge gibt es eine Ableitung der leeren Klausel durch lineare Resolution, aber nicht jede angefangene Ableitung mit linearer Resolution kann zu einem Beweis geschlossen werden. Es kann also Sackgassen in der Beweissuche geben (lineare Resolution ist *nicht beweiskonfluent*). Insbesondere spielt die Wahl der Startklausel dabei eine Rolle; die Wahl einer ungünstigen Startklausel kann in die Sackgasse führen.

(a) Geben Sie für die Klauselmenge

$$\{\{A, D\}, \{\neg A, B\}, \{\neg D, B\}, \{C, A\}, \{C, B\}, \{\neg B\}\}$$

eine Ableitung der leeren Klausel $\square$ mittels linearer Resolution an.

(b) Geben Sie für die Klauselmenge aus (a) einen angefangenen linearen Resolutionsbeweis an, der nicht zur leeren Klausel $\square$ führen kann, also eine Sackgasse darstellt.

Aufgabe 4

Zeigen Sie oder widerlegen Sie mithilfe des Tableaukalküls die Allgemeingültigkeit folgender Formeln. Falls eine der Formeln nicht allgemeingültig ist, geben Sie eine erfüllende Belegung ihres Negats an.

Hinweis: Um die Allgemeingültigkeit zu zeigen, konstruieren Sie ein geschlossenes Tableau für die Negation der Formel. Um zu zeigen, dass eine Formel nicht allgemeingültig ist, konstruieren Sie ein Tableau für das Negat der Formel, das mindestens einen voll expandierten und nicht geschlossenen Ast hat. Aus diesem können Sie dann auch die der Allgemeingültigkeit widersprechende Belegung ablesen.

(a) $((A \to B) \to C) \to (B \to C)$

(b) $(B \to C) \to ((A \to B) \to C)$

Aufgabe 5

(a) Geben Sie für den *sh*-Operator korrekte und vollständige Regeln für den Tableaukalkül an.

(b) Zeigen Sie die Korrektheit und Vollständigkeit Ihrer Regeln aus Teilaufgabe (a).

Aufgabe 6

Gegeben Sei folgender Sachverhalt:

> Eine Familie plant ihren Urlaub. Falls sie nicht mit dem Flugzeug fliegen, besteht der Vater auf Vollpension am Meer. Die Mutter möchte mindestens einen ihrer drei Wünsche erfüllt sehen: ans Meer fliegen, oder am Meer aber ohne Pool, oder Vollpension und Pool. Gibt es keinen Pool, so besteht Tochter Lisa auf einer Flugreise und Urlaub am Meer und darauf daß keine Vollpension gebucht wird. Auch dem Baby soll einer seiner Wünsche erfüllt werden: erstens einen Pool und nicht fliegen oder zweitens Vollpension, dann aber ohne Pool.

(a) Formalisieren Sie die Anforderungen der Famlilie an ihre Urlaubsreise in Aussagenlogik.

Hinweis: Da wir anstreben, die ganze Familie glücklich zu machen, ist es unerheblich, welches Familienmitglied welchen Wunsch äußert, d.h., diese Information muß nicht formalisiert werden.

(b) Überprüfen Sie mithilfe des Tableaukalküls, ob es möglich ist, die Wünsche aller Familienmitglieder zu erfüllen. Falls ja, geben Sie an, wie der Urlaub der Familie aussieht.