UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
M. Ulbrich

Formale Systeme, WS 2008/2009

Übungsblatt 3

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 28.11.2008 besprochen.

Aufgabe 1

Zeigen Sie mithilfe des in der Vorlesung vorgestellten numerischen Verfahrens

(a) die Unerfüllbarkeit der Klauselmenge

$$\{\{A, B, \neg C\}, \{\neg A\}, \{A, B, C\}, \{A, \neg B\}\} \ .$$

(b) die Allgemeingültigkeit der Formel

$$(\neg B \land \neg C \land D) \lor (\neg B \land \neg D) \lor (C \land D) \lor B \ .$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie mit Hilfe des David-Putnam-Verfahrens, dass die Klauselmenge

$$\begin{array}{llll} \{ & \{\neg B, C\}, & \{\neg A, B, C\}, & \{\neg A, B, \neg C\}, \\ & \{\neg B, \neg C\}, & \{A, B, C\}, & \{A, B, \neg C\} \quad \} \end{array}$$

unerfüllbar ist.

Aufgabe 3

(a) Formalisieren Sie Folgendes in Aussagenlogik:

> (1) Ein Patient ist hysterisch oder größenwahnsinnig oder beides. (2) Wenn er größenwahnsinnig ist, jedoch keinen Minderwertigkeitskomplex hat, dann hat er Zwangsvorstellungen. (3) Mit Sicherheit hat er nicht sowohl Zwangsvorstellungen als auch Depressionen. (4) Hat er einen Minderwertigkeitskomplex, so hat er keine Depressionen. (5) Faktum: Depression und Hysterie schließen sich gegenseitig aus. (6) Falls der Patient Zwangsvorstellungen hat, ist er zwar nicht größenwahnsinnig, wohl aber hat er einen Minderwertigkeitskomplex. (7) Falls er keine Zwangsvorstellungen hat, so hat er wenigstens Depressionen.

(b) Geben Sie eine zu Ihrer Formalisierung äquivalente Formel in konjunktiver Normalform an.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des Davis-Putnam-Verfahrens, dass der Patient Minderwertigkeitskomplexe und Zwangsvorstellungen hat und zudem hysterisch ist.

Aufgabe 4

(a) Betrachten Sie jeweils die folgenden Substitutionen σ und Formeln F. Falls σ für F kollisionsfrei ist, geben Sie $\sigma(F)$ an; andernfalls geben Sie an, wo eine Kollision auftritt.

(i)	$\sigma = \{x/c,\ y/f(c, g(x))\}$	$F = \forall x(p(g(x), f(x, y)) \vee q(x))$
(ii)	$\sigma = \{x/f(g(x), c)\}$	$F = \exists y(p(x, y) \vee \exists z \forall x(f(z, c) \doteq f(c, x)))$
(iii)	$\sigma = \{y/g(x),\ z/g(y)\}$	$F = p(x, y) \rightarrow \forall x(q(f(x, z)) \vee \exists y(q(f(x, y))))$

(b) Betrachten Sie jeweils die folgenden Formeln F und G. Geben Sie einen allgemeinsten Unifikator μ sowie das Ergebnis $\mu(F) = \mu(G)$ der Unifikation an, falls sie unifizierbar sind.

(i)	$F = q(f(f(x, y), x))$	$G = q(f(f(g(c), z), g(z)))$
(ii)	$F = p(x, y)$	$G = p(f(y), f(x))$
(iii)	$F = p(x, f(y, x))$	$G = p(f(y, c), f(g(z), f(g(z), c)))$

Bemerkung: Der Konvention im Skript (nach Def. 4.5) folgend ist c eine Konstante und x, y, z sind Variablen.

Aufgabe 5

Sei Σ eine prädikatenlogische Signatur mit einem zweistelligen Prädikatensymbol p.

(a) Geben Sie eine prädikatenlogische Formel F über Σ an, so dass gilt: Eine Interpretation (D, I) ist genau dann Modell von F, wenn die Relation $I(p)$ eine *strikte Halbordnung* (also transitiv und irreflexiv) auf D ist.

(b) Geben Sie eine erfüllbare prädikatenlogische Formel G über Σ an, so dass gilt: Wenn eine Interpretation (D, I) Modell von G ist, dann ist D unendlich.

Aufgabe 6

Häufig ist es geschickt, einen Term in Abhängigkeit von der Auswertung einer Formel zu verwenden. Für Formeln kann dazu der schon bekannte *sh*-Operator verwendet werden, auf Termebene benötigt man **bedingte Terme** (engl. *conditional terms*).

Definition (bedingte Terme) Seien $\phi \in For_\Sigma$ eine Formel und $t_1, t_2 \in Term_\Sigma$ Terme, dann ist

$$(\texttt{if}\ \phi\ \texttt{then}\ t_1\ \texttt{else}\ t_2) \in Term_\Sigma$$

auch ein Term. Die Semantik ist dabei für eine Interpretation (D, I) und eine Variablenbelegung β definiert durch

$$\mathrm{val}_{I,\beta}(\texttt{if}\ \phi\ \texttt{then}\ t_1\ \texttt{else}\ t_2) := \begin{cases} \mathrm{val}_{I,\beta}(t_1) & \text{wenn } \mathrm{val}_{I,\beta}(\phi) = W \\ \mathrm{val}_{I,\beta}(t_2) & \text{wenn } \mathrm{val}_{I,\beta}(\phi) = F \end{cases}$$

(a) Geben Sie für die Formel $(x \doteq \texttt{if}\ \phi\ \texttt{then}\ t_1\ \texttt{else}\ t_2)$ eine logisch äquivalente Formel ohne bedingte Terme an.

(b) Zeigen Sie die Äquivalenz $p(f(c)) \ \leftrightarrow\ \exists x.(x \doteq c\ \wedge\ p(f(x)))$

(c) Geben Sie in Worten einen Algorithmus an, der für eine Formel der erweiterten Syntax eine logisch äquivalente Formel ohne bedingte Terme berechnet.

Aufgabe 7

Geben Sie für jede der folgenden Formeln an, ob sie erfüllbar, allgemeingültig, unerfüllbar oder keine Formel der Prädikatenlogik erster Stufe ist. Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

(a) $\exists x(\forall x(\neg f(x) \doteq f(x)))$

(b) $\forall x(f(x) \doteq c) \to f(f(f(c))) \doteq c$

(c) $\forall x(\forall y(p(x) \vee \neg p(y)))$

(d) $\forall x(p(x) \doteq \mathbf{1} \wedge q(x) \doteq \mathbf{1} \to p(x) \doteq q(x))$

(e) $(r \to (s \to r)) \to ((r \to s) \to r)$

Bemerkung: Eine Formel kann mehr als eine der genannten Eigenschaften haben. p, q, r, s sind Prädikatssymbole, f ein Funktionssymbol (mit der richtigen Stelligkeit) und x, y sind Variablen.

Aufgabe 8

Tante Agathe wurde in ihrem Haus tot aufgefunden. Nach bisherigen Ermittlungen gilt Folgendes als sicher:

1. Im Haus lebten nur Agathe, ihr Butler und Onkel Charles.
2. Agathe wurde von einem Hausbewohner getötet.
3. Wer jemanden tötet, hasst sein Opfer.
4. Charles hasst niemanden, den Agathe hasste.
5. Der Täter ist niemals reicher als das Opfer.
6. Der Butler hasst alle, die nicht reicher als Agathe sind oder die Agathe hasste.
7. Kein Bewohner des Hauses hasst(e) alle Hausbewohner.

Gegeben ist ferner die prädikatenlogische Signatur $\Sigma_{Agathe} = (F, P, \alpha)$ mit

- $P = \{\text{kills}, \text{hates}, \text{richer}\}$
- $F = \{a, b, c\}$
- $\alpha(a) = \alpha(b) = \alpha(c) = 0, \qquad \alpha(\text{kills}) = \alpha(\text{hates}) = \alpha(\text{richer}) = 2$

Formalisieren Sie die Aussagen 1-7 in Prädikatenlogik mit dem Vokabular aus Σ_{Agathe}.

Bemerkung: Dieses Problem ist ein Standardproblem zur Evaluierung von automatischen Beweisern. Auf einem späteren Übungsblatt werden wir den Täter auch formal überführen können.