UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
M. Ulbrich

Formale Systeme, WS 2008/2009

Übungsblatt 4

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 12.12.2008 besprochen.

Aufgabe 1

Zu einer prädikatenlogischen Formel G in Pränexnormalform bezeichne G_{sko} die durch Skolemisierung (genauer: durch wiederholte Anwendung von Lemma 4.61 im Skriptum) aus G konstruierte Formel in Skolem-Normalform.

(a) Geben Sie (ohne Beweis) jeweils eine prädikatenlogische Formel G in Pränexnormalform an, so dass Folgendes gilt:

  (i) $\neg G_{\text{sko}} \wedge G$ ist erfüllbar,

  (ii) $\neg G_{\text{sko}} \wedge G$ ist unerfüllbar,

  (iii) $G \to G_{\text{sko}}$ ist nicht allgemeingültig.

(b) Zeigen Sie, dass $G_{\text{sko}} \to G$ für alle prädikatenlogischen Formeln G in Pränexnormalform allgemeingültig ist.

Aufgabe 2

Berechnen Sie für die prädikatenlogischen Formeln (a) und (b) zunächst die Pränex-Normalform und dann die Skolem-Normalform.

(a) $(\forall x\ p(x) \to \forall x\ q(x)) \to \forall x(p(x) \to q(x))$

(b) $\exists x(\forall y\ p(x,y) \vee \exists z(p(x,z) \wedge \forall x\ p(z,x)))$

(c) Geben Sie eine Skolem-Normalform für (a) an, die sich von Ihrer Lösung zu (a) nicht nur durch Umbenennung und Äquivalenzumformung unterscheidet.

Aufgabe 3

In der Vorlesung wurden die beiden Interpretationen $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$ der Signatur, die $+, *$ (Funktionssymbole) und $\leq$ (Prädikatsymbol) enthält, vorgestellt.

Überprüfen Sie, ob die folgenden Formeln in $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$ erfüllt sind oder nicht. Begründen Sie jeweils kurz.

(a) $\forall y(\exists k_1(2 * k_1 \doteq y) \to \exists k_2(2 * k_2 \doteq y + 2))$

(b) $\forall x(0 \leq x \to x \leq x * 2)$

(c) $\exists x \forall y(x \leq y)$

Aufgabe 4

Finden Sie eine Formel φ der Prädikatenlogik erster Stufe mit leeren Vokabular, so daß $M \models \varphi$ genau dann gilt, wenn M genau drei Elemente hat. Die Formel φ enthält also als einziges Relationszeichen das Symbol $\doteq$ für die Gleichheit.

Aufgabe 5

Neben dem Folgerbarkeitsbegriff aus der Vorlesung (s. Definition 4.38) gibt es einen weiteren Folgerbarkeitsbegriff, dem man sehr häufig in der Literatur begegnen kann.

Definition (lokale Folgerbarkeit) Sei $M \subseteq For_\Sigma$ eine Formelmenge und $A \in For_\Sigma$ eine Formel. Dann wird die lokale Folgerbarkeit $M \models^\circ A$ definiert durch

$$M \models^\circ_\Sigma A \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Für jede Interpretation } (D, I) \text{ und jede Belegung } \beta \text{ gilt: Wenn } \mathrm{val}_{I,\beta}(M) = W, \text{ dann gilt auch } \mathrm{val}_{I,\beta}(A) = W.$$

Seien nun $A, B \in For_\Sigma$.

(a) Zeigen Sie, dass aus $A \models^\circ B$ bereits $A \models B$ folgt.

(b) Finden Sie Formeln A und B, so dass $A \models B$, aber nicht $A \models^\circ B$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $A \models^\circ B \quad \Leftrightarrow \quad \models^\circ A \to B \quad \Leftrightarrow \quad \models A \to B$ gilt.