UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
M. Ulbrich

Formale Systeme, WS 2008/2009

Lösungen zum Übungsblatt 6

Dieses Blatt wurde in der Übung am 9.1.2009 besprochen.

Zu Aufgabe 1

Abbildung 1 zeigt ein geschlossenes Tableau für die Anfangsmarkierung

$$0(\forall x p(x) \vee \forall x q(x)) \to \forall x (p(x) \vee q(x)).$$

Das Negat der Formel ist also unerfüllar, die Formel selbst also allgemeingültig.

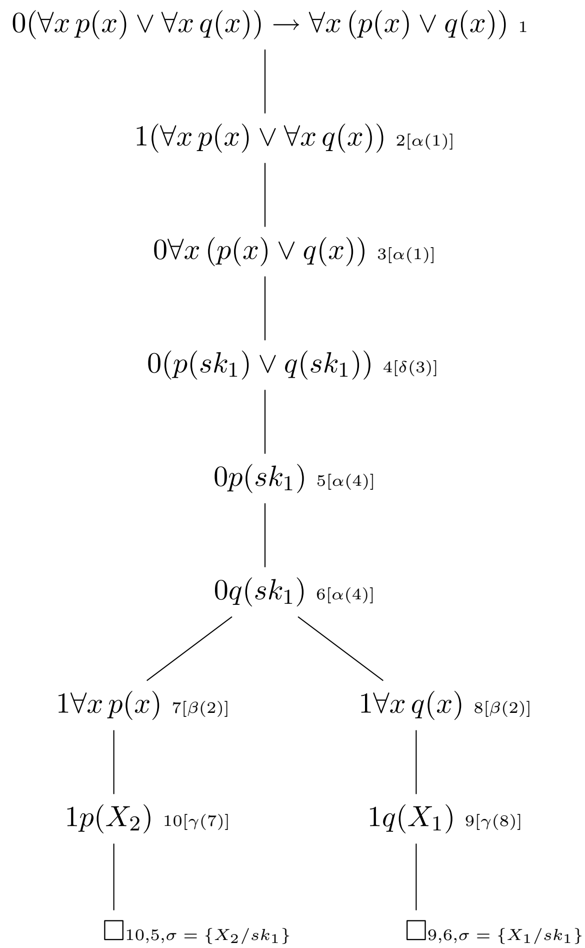

Abbildung 1: Tableau zu Aufgabe 1

Zu Aufgabe 2

(a) Formalisierung der Aussagen:

- $\forall x \forall y((p(x) \land kn(y)) \to \neg ma(x,y))$
- $\forall x(p(x) \to \exists y(fi(y) \land ma(x,y)))$
- $\exists x p(x)$

(b) Formalisierung der daraus zu schließenden Aussage:

$$\exists x(fi(x) \land \neg kn(x))$$

Tableau siehe Abb. 2.

Zu Aufgabe 3

Abbildung 3 zeigt ein Tableau für $\neg A$.

Es handelt sich dabei um einen Ausdruck aus dem Applet der Vorlesungsseite. Die Knoten sind nach folgendem Schema farbkodiert:

grün	α-Formeln
violett	β-Formeln
hellblau	γ-Formeln
gelb	δ-Formeln
magenta	Doppelnegationsformeln (kommen hier nicht vor)

Mit dem Applet werden Tableaux ohne Vorzeichen erstellt, das Vorgehen ist aber offensichtlich und die Vorzeichen könnten leicht hinzugefügt werden.

Das Tableau aus Abb. 3 ist noch nicht geschlossen (damit die freien Variablen sichtbar bleiben). Durch die Substitution

$$\mu = \{X_1/sk_1, X_2/sk_3, X_3/sk_3, X_4/sk_3, X_5/sk_2\}$$

kann es aber geschlossen werden.

Zu Aufgabe 4

(a) Formalisierung in PL1:

$$A := \exists x(t(x) \to \forall y(t(y)))$$

(b) Es soll mit Hilfe der Semantikdefinition der PL1 gefolgert werden, dass die in Teilaufgabe (a) formalisierte Aussage A eine allgemeingültige PL1-Formel ist.

Es ist zu zeigen: Für beliebiges $\mathcal{D} = (D, I), \beta$ gilt:

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\exists x(t(x) \to \forall y(t(y)))) = W$$

gdw. es existiert $d \in D$ mit $val_{\mathcal{D},\beta_x^d}(t(x) \to \forall y(t(y))) = W$
gdw. es existiert $d \in D$ mit $val_{\mathcal{D},\beta_x^d}(t(x)) = F$ oder $val_{\mathcal{D},\beta_x^d}(\forall y(t(y))) = W$
gdw. es existiert $d \in D$ mit $val_{\mathcal{D},\beta_x^d}(t(x)) = F$ oder $val_{\mathcal{D},\beta}(\forall y(t(y))) = W$
gdw. es existiert $d \in D$ mit $d \notin I(t)$ oder für alle $d \in D$ gilt $d \in I(t)$
gdw. $I(t) \subsetneq D$ oder $I(t) = D$

Die letzte Aussage sagt über die Menge $I(t)$ der durch t zu wahr interpretierten Objekte aus: Entweder es gibt ein Element d aus D außerhalb von $I(t)$ oder alle Elemente $d \in D$ liegen in $I(t)$. Offensichtlich ist dies eine allgemeingültige Aussage, wenn D nicht leer ist.

- $1\forall x\,\forall y\,((p(x) \wedge kn(y)) \rightarrow \neg ma(x,y))$ 1
- $1\forall x\,(p(x) \rightarrow \exists y\,(\mathit{fi}(y) \wedge ma(x,y)))$ 2
- $1\exists x\,p(x)$ 3
- $0\exists x\,(\mathit{fi}(x) \wedge \neg kn(x))$ 4
- $1p(sk_1)$ 5[δ(3)]
- $1(p(X_1) \rightarrow \exists y\,(\mathit{fi}(y) \wedge ma(X_1,y)))$ 6[γ(2)]
  - $0p(X_1)$ 7[β(6)]
    - $\square$
    - $8, 5$
    - $\{X_1/sk_1\}$
  - $1\exists y\,(\mathit{fi}(y) \wedge ma(X_1,y))$ 8[β(6)]
    - $1(\mathit{fi}(sk_2(X_1)) \wedge ma(X_1, sk_2(X_1)))$ 9[β(7)]
    - $1\mathit{fi}(sk_2(X_1))$ 10[α(9)]
    - $1ma(X_1, sk_2(X_1))$ 11[α(9)]
    - $1\forall y\,((p(X_2) \wedge kn(y)) \rightarrow \neg ma(X_2,y))$ 12[γ(1)]
    - $1((p(X_2) \wedge kn(X_3)) \rightarrow \neg ma(X_2,X_3))$ 13[γ(12)]
      - $0(p(X_2) \wedge kn(X_3))$ 14[β(13)]
        - $0p(X_2)$ 16[β(14)]
          - $\square$
          - $16, 5$
          - $\{X_2/sk_1\}$
        - $0kn(X_3)$ 17[β(14)]
          - $0(\mathit{fi}(X_4) \wedge \neg kn(X_4))$ 18[γ(4)]
            - $0\mathit{fi}(X_4)$ 19[β(18)]
              - $\square$
              - $19, 10$
              - $\{X_4/sk_2(sk_1)\}$
            - $0\neg kn(X_4)$ 20[β(18)]
              - $1kn(X_4)$ 21[0$\neg$(20)]
              - $\square$
              - $21, 17$
              - $\{X_3/sk_2(sk_1)\}$
      - $1\neg ma(X_2,X_3)$ 15[β(13)]
        - $0ma(X_2,X_3)$ 22[1$\neg$(15)]
        - $\square$
        - $22, 11$

Abbildung 2: Tableau zu Aufgabe 2

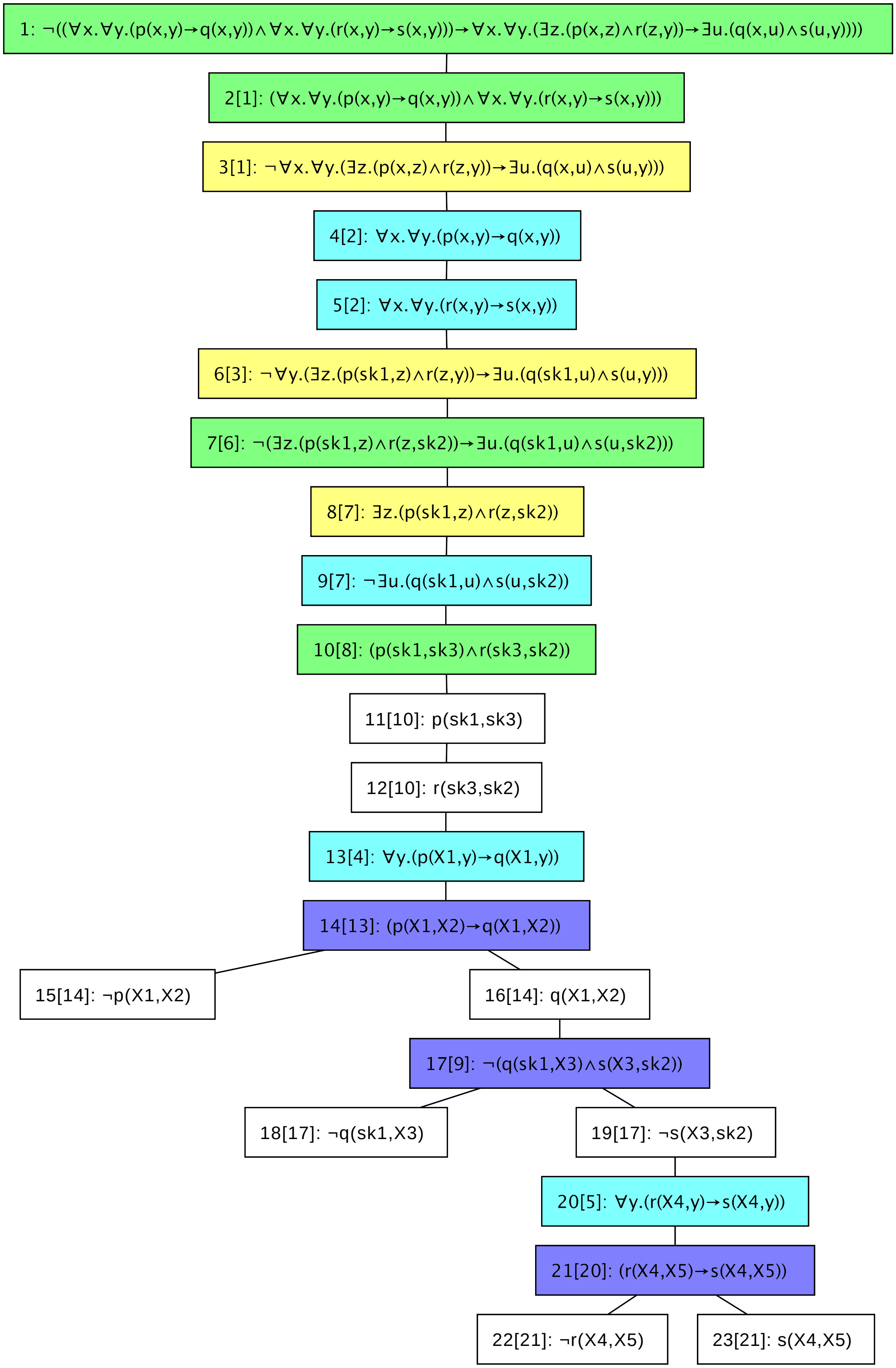

Abbildung 3: Lösung zu Aufgabe 3

(c) Wir haben bisher bei der Definition der Semantik der PL1 immer gefordert, dass das Universum (die Objektmenge D) nicht leer sein darf. Man kann die Definition unter gewissen Bedingungen verallgemeinern und auch Interpretationen mit leerem D in Betracht ziehen.

Die Definition der Semantik von $\exists$ besagt:

$$val_{D,I,\beta}(\exists x\varphi) := \begin{cases} W \text{ falls ein } d \in D \text{ existiert mit } val_{D,I,\beta_x^d}(\varphi) = W \\ F \text{ sonst} \end{cases}$$

Daher gilt für jedes $\mathcal{D} = (\emptyset, I)$ und jede Formel φ:

$$\mathcal{D} \models \neg\exists x\ \varphi$$

insbesondere auch $\mathcal{D} \models \neg A$.

(d) Das folgende nicht-verzweigende Tableau ist mit der Substitution $\{X/c\}$ geschlossen:

$0\exists x(t(x) \to \forall y(t(y)))$
$0(t(X) \to \forall y(t(y)))$
$1t(X)$
$0\forall y(t(y))$
$0t(c)$