UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
M. Ulbrich

Formale Systeme, WS 2008/2009

Lösungen zum Übungsblatt 8

Dieses Blatt wurde in der Übung am 23.1.2009 besprochen.

Zu Aufgabe 1

Betrachten wir zunächst nur $(N, \succ)$

(a) Es gilt:

$$6 \succ 2,\ 6 \succ 3$$

Aber 2 und 3 sind irreduzible Elemente, weil sie keine echten Teiler größer 1 haben. Also ist das Redsystem **nicht** lokal konfluent.

(b) ... und damit natürlich auch nicht konfluent.

(c) Aus $n \succ m$ folgt, dass $n > m$. In $\mathbb{N}$ kann es aber keine unendliche absteigende Kette geben ($(\mathbb{N}, >)$ ist noethersch), also ist $(N, \succ)$ noethersch.

(d) Die irreduziblen Elemente sind gerade die natürlichen Zahlen, die keine natürlichen Teiler haben außer 1 und sich selbst, also die Primzahlen.

Hier fällt der Begriff irreduzibel mit dem aus der Algebra/Zahlentheorie zusammen.

Desweiteren nun die Betrachtung für $(N', \succ)$: 1 ist Teiler jeder positiven natürlichen Zahl, also gilt, dass: $n \succ 1$ für alle $n \in N'$.

(a) folgt aus (b).

(b) Sei $n \succ m_1$ und $n \succ m_2$. Dann ist wegen $m_1 \succ 1$ und $m_2 \succ 1$ die Konfluenz gegeben.

(c) Das Argument von oben greift auch hier.

(d) 1 ist das einzig irreduzible Element.

Zu Aufgabe 2

Zunächst eine Beobachtung: Alle Grundterme $t \in Term_{\Sigma_{\text{Stack}}}$ sind von der Form

$$t = f_1(f_2(\dots f_m(\text{null}) \dots))$$

mit $f_i \in \{\text{push}, \text{pop}\}$.

(a) Ein Reduktionssystem ist kanonisch, wenn es noethersch und konfluent ist.

Noethersch In jedem Reduktionsschritt wird die Zahl der verwendeten Funktionszeichen im Term um wenigstens 1 kleiner. Da es keine unendliche absteigende Ketten in $\mathbb{N}$ gibt, gibt es damit auch keine unendliche Folge an Reduktionsschritten.

Lokal konfluent Sei t ein Term, auf den mehr als ein Reduktionsschritt anwendbar ist und seien $t \rightarrow_E^1 s_1$ und $t \rightarrow_E^1 s_2$ zwei verschiedene Reduktionsschritte. Aus der Form der beiden Gleichungen ergibt sich, dass die eine Anwendung nur “innerhalb” der anderen erfolgen kann. Wenn beispielsweise beide Anwendungen die erste Gleichung verwenden, entsteht eine Situation wie in Abbildung 1. Die linke Seite der Gleichung push(pop(x)) wird einmal mit t_1 und einmal mit t_2 unifiziert, wobei t_2 ein echter Teilterm von t_1 ist. s_1 enthält t_2 immer noch als Teilterm, eine Anwendung der GLeichung auf t_2 ergibt t_2' als Teilterm in s. Umgekehrt kann zunächst t_2 zu t_2' reduziert werden und dann der entstehenden Term s_2 reduziert werden. Es entsteht ebenfalls der Term s.

Analoges gilt auch, wenn eine der beiden Reduktionen die zweite Gleichung verwendet.

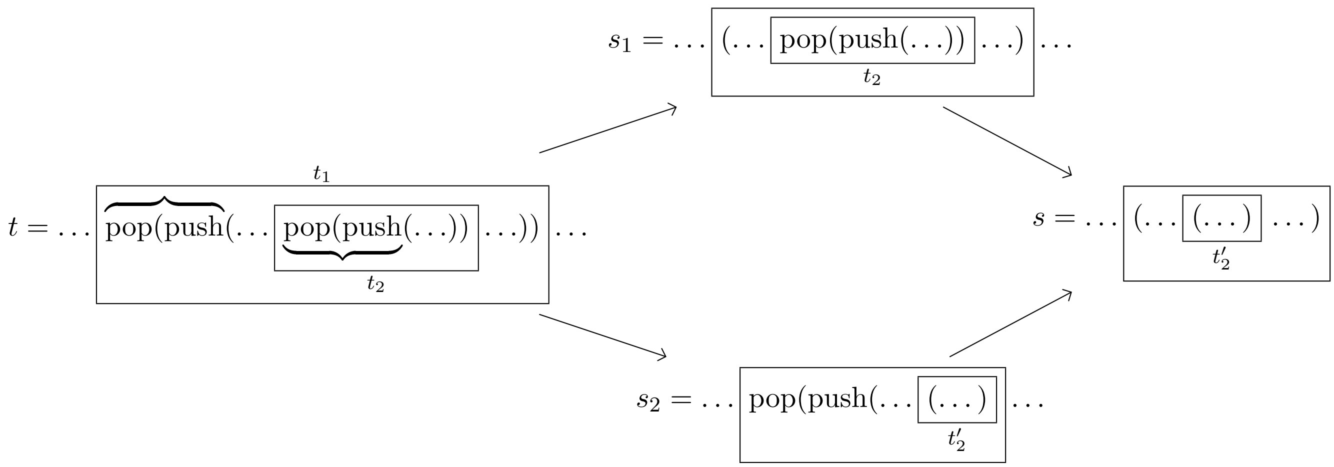

Abbildung 1: Lokale Konfluenz in Aufg. 5a

Konfluent Noethersch und lokal konfluent $\overset{\text{Lemma 5.59}}{\Longrightarrow}$ konfluent

(b) Das System ist kanonisch, also führt jede mögliche Ableitung zum selben Ziel:

$$\begin{aligned}
t &= \text{push(pop(pop(push(push(push(}\boxed{\text{pop(null)}}\text{))))))} \\
&\rightarrow_E^1 \text{push(pop(}\boxed{\text{pop(push(push(push(null))))}}\text{))} \\
&\rightarrow_E^1 \text{push(}\boxed{\text{pop(push(push(null)))}}\text{)} \\
&\rightarrow_E^1 \text{push(push(null))} =: t_{irr}
\end{aligned}$$

(c) Die Menge aller irreduziblen Terme ist:

$$T = \left\{ \underbrace{\text{push(push(}\dots\text{push(}}_{n \text{ Mal}}\text{null)))} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

Zu Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
\text{impl}(x, y) &\doteq \text{or}(\text{not}(x), y) && (1) \\
\text{not}(\text{and}(x, y)) &\doteq \text{or}(\text{not}(x), \text{not}(y)) && (2) \\
\text{not}(\text{or}(x, y)) &\doteq \text{and}(\text{not}(x), \text{not}(y)) && (3) \\
\text{or}(x, \text{and}(y, z)) &\doteq \text{and}(\text{or}(x, y), \text{or}(x, z)) && (4) \\
\text{or}(\text{and}(x, y), z) &\doteq \text{and}(\text{or}(x, z), \text{or}(y, z)) && (5) \\
\text{not}(\text{not}(x)) &\doteq x && (6)
\end{aligned}$$

Dieses System ist nicht konfluent, wie die folgenden Ableitungen zeigen:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{not}(\mathrm{or}(P_1, \mathrm{and}(P_2, P_3))) &\overset{(3)}{\to}_E && \mathrm{and}(\mathrm{not}(P_1), \mathrm{not}(\mathrm{and}(P_2, P_3))) \\
&\overset{(2)}{\to}_E && \mathrm{and}(\mathrm{not}(P_1), \mathrm{or}(\mathrm{not}(P_2), \mathrm{not}(P_3))) \quad (\mathrm{irred})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{not}(\mathrm{or}(P_1, \mathrm{and}(P_2, P_3))) &\overset{(4)}{\to}_E && \mathrm{not}(\mathrm{and}(\mathrm{or}(P_1, P_2), \mathrm{or}(P_1, P_3))) \\
&\overset{(2)}{\to}_E && \mathrm{or}(\mathrm{not}(\mathrm{or}(P_1, P_2)), \mathrm{not}(\mathrm{or}(P_1, P_3))) \\
&\overset{2\times(3)}{\to}_E && \mathrm{or}(\mathrm{and}(\mathrm{not}(P_1), \mathrm{not}(P_2)), \mathrm{and}(\mathrm{not}(P_1), \mathrm{not}(P_3))) \\
&\overset{\cdots}{\to}_E && \mathrm{and}(\mathrm{and}(\mathrm{or}(\mathrm{not}(P_1), \mathrm{not}(P_1)), \mathrm{or}(\mathrm{not}(P_1), \mathrm{not}(P_3))), \ldots \\
& && \quad \ldots\ \mathrm{and}(\mathrm{or}(\mathrm{not}(P_2), \mathrm{not}(P_1)), \mathrm{or}(\mathrm{not}(P_2), \mathrm{not}(P_3)))) \quad (\mathrm{irred})
\end{aligned}
$$

Man kann zeigen, dass dieses System noethersch ist. (Das Stichwort dazu lautet *Rekursive Pfadordnung*). Daher ist nun die Frage: Kann man weitere Regeln hinzunehmen, um es zu einem kanonischen System zu ergänzen? Man kann nicht! In [1] steht ein Beweis, dass es kein kanonisches System geben kann.

Zu Aufgabe 4

Die Idee hinter der Vervollständigung von Termersetzungssystemen ist das Identifizieren von Termpaaren (so genannten *kritische Paare*), die beide als Ergebnis einer Termreduktion vom selben Term ausgehend entstehen können, aber dann nicht zum selben irreduziblen Term führen. Man stellt sicher, dass die Wohlfundiertheit erhalten bleibt und erweitert das Gleichungssystem um die Gleichheit der irreduziblen Terme. Dann sucht man erneut nach kritischen Paaren.

(a) Eine Möglichkeit aus einem Term zu verschiedenen irreduziblen Termen zu kommen ist:

$$
\begin{tikzcd}
 & f(g(x,x)) =: t_1 \\
\underbrace{f(\overbrace{f(f(x))}^{\doteq g(x,x)})}_{\doteq g(f(x),f(x))} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & g(f(x), f(x)) =: t_2
\end{tikzcd}
$$

Die beiden Terme t_1 und t_2 sind irreduzibel, da sie nicht mit der linken Seite der ursprünglichen Gleichung unifiziert werden können. Also fügt man eine der Gleichungen $t_1 \doteq t_2$ oder $t_2 \doteq t_1$ zum Gleichungssystem hinzu. Auf keinen Fall darf man beide Gleichungen hinzufügen, denn das würde offensichtlicherweise die noethersche Eigenschaft zerstören.

Das entstehende Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
f(f(x)) &\doteq g(x,x) && (7) \\
f(g(x,x)) &\doteq g(f(x), f(x)) && (8)
\end{aligned}
$$

enthält eine neue Situation, in der zwei verschiedene Regeln auf einen Term angewendet werden können.

$$
\begin{tikzcd}
 & f(g(f(x), f(x))) =: u_1 \arrow[r, "(8)"] & g(f(f(x)), f(f(x))) \arrow[r, "2\times(7)"] & g(g(x,x), g(x,x)) \\
\underbrace{f(\overbrace{f(g(x,x))}^{})} \arrow[ur, "(8)"] \arrow[dr, "(7)"'] & & & \\
 & g(g(x,x), g(x,x)) =: u_2 \arrow[uurr, dotted, no head, "="'] & &
\end{tikzcd}
$$

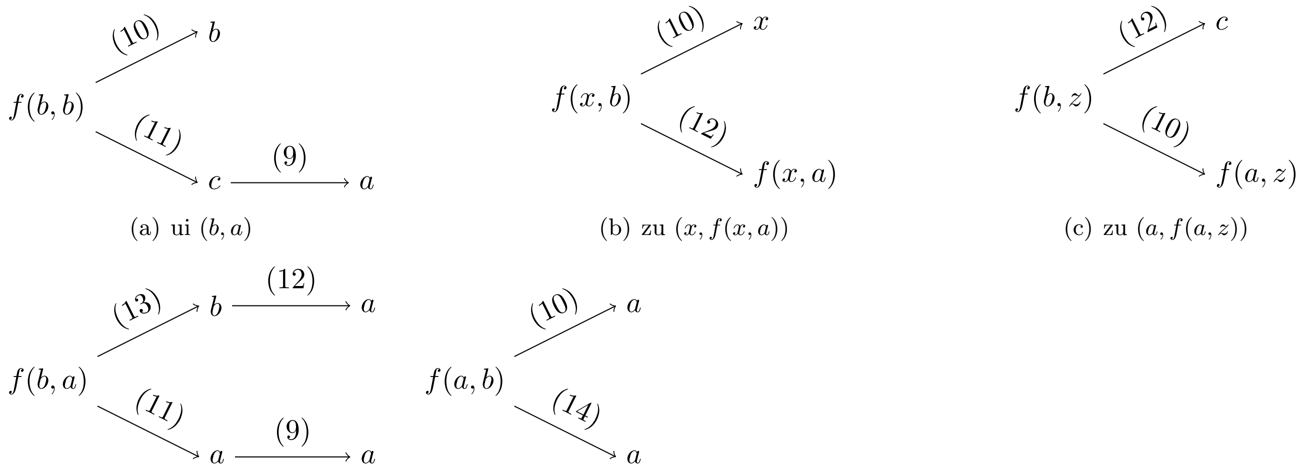

Abbildung 2: Ableitungen zu Aufgabe 4b

Es entstehen die beiden Terme u_1 und u_2. Der Term u_2 ist irreduzibel, u_1 kann dagegen noch durch 3 Reduktionsschritte auf einen irreduziblen Term geführt werden. Dieser ist ebenfalls u_1, so dass keine weitere Gleichung hinzugefügt werden muss.

(b) Gegeben ist das Termersetzungssystem mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} c &\doteq a && (9)\\ f(x,b) &\doteq x && (10)\\ f(b,z) &\doteq c && (11) \end{aligned}$$

Man erhält aus der Ableitung in Abb. 2(a) das Paar (b, a) an problematischen Termen. Man benötigt also eine der Gleichungen $b = a$ oder $a = b$, um das System in Richtung Vollständigkeit zu verbessern. Nehmen wir also

$$b \doteq a \tag{12}$$

als Gleichung mit auf. Nun ergiben sich das Problempaare $(x, f(x, a))$ und $(a, f(a, z))$ aus den Ableitungen in Abb. 2(b) und 2(c). Nähme man $x \doteq f(x, a)$ als Gleichung hinzu, würde das System offensichtlich nicht mehr noethersch sein. Also ergänzen wir das System um die Gleichungen

$$\begin{aligned} f(x,a) &\doteq x && (13)\\ f(a,z) &\doteq a\ . && (14) \end{aligned}$$

Man kann danach zwar wieder auf neue Weise denselben Term auf verschiedene Arten reduzieren (siehe Abb. 2(d) und 2(e)), aber es ergeben sich keine neuen Paare irrdeduzibler Terme, für die man neue Gleichungen hinzunehmen müsste. Das entstandene Gleichungssystem 9–14 ist übrigens kanonisch.

(c) Sei x eine Variable, die in einer Gleichung $l \doteq r$ in E nur in r nicht aber in l auftritt, so kann man mit einem Schritt $l \to \{x/g(l)\}r$ herleiten. Von l ausgehend erhalte ich also einen Term, der wieder l als echten Teilterm enthält und auf den ich erneut diese vergrößerende Regel anwenden kann. Diese kann beliebig oft angewendet werden, der Term in seiner Länge dabei beliebig wachsen.

Beispiel: $E = \{g(a) = f(a, x)\}$ erlaubt die Ableitung von

$$g(a) \to f(a, g(g(a))) \to_E f(a, g(f(a, g(g(a))))) \to_E f(a, g(f(a, g(f(a, g(g(a) \to_E \dots$$

Literatur

[1] Socher-Ambrosius, Rolf: Boolean algebra admits no convergent term rewriting system. *RTA-91: Proceedings of the 4th international conference on Rewriting techniques and applications*, pp. 264–274, Springer-Verlag New York Inc., 1991