KIT
Karlsruhe Institute of Technology

Formale Systeme

Erfüllbarkeitsproblem für spezielle Formelklassen

Prof. Dr. Bernhard Beckert | WS 2009/2010

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Das SAT Problem

SAT

Instanz: Eine aussagenlogische Formel $F \in For0$

Frage: Ist F erfüllbar?
Gibt es eine Interpretation I mit $val_I(F) = \mathbf{1}$?

SAT ist ein *NP-vollständiges* Problem:

Gäbe es einen (deterministischen) polynomialen Entscheidungsalgorithmus für die Erfüllbarkeit, dann wäre $NP = P$, d. h. jedes nichtdeterministisch-polynomiale Entscheidungsproblem auch deterministisch-polynomial.

Das SAT Problem

SAT

Instanz: Eine aussagenlogische Formel $F \in For0$

Frage: Ist F erfüllbar?
Gibt es eine Interpretation I mit $val_I(F) = \mathbf{1}$?

SAT ist ein *NP-vollständiges* Problem:

Gäbe es einen (deterministischen) polynomialen Entscheidungsalgorithmus für die Erfüllbarkeit, dann wäre $NP = P$, d. h. jedes nichtdeterministisch-polynomiale Entscheidungsproblem auch deterministisch-polynomial.

Das SAT Problem

SAT

Instanz: Eine aussagenlogische Formel $F \in For0$

Frage: Ist F erfüllbar?
Gibt es eine Interpretation I mit $val_I(F) = \mathbf{1}$?

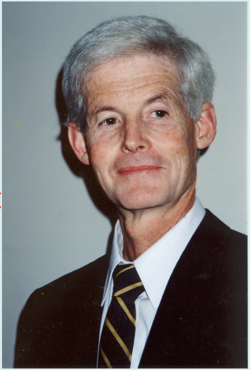
SAT ist ein *NP-vollständiges* Problem:

Gäbe es einen (deterministischen) polynomialen Entscheidungsalgorithmus für die Erfüllbarkeit, dann wäre $NP = P$, d. h. jedes nichtdeterministisch-polynomiale Entscheidungsproblem auch deterministisch-polynomial.

Satz von Cook

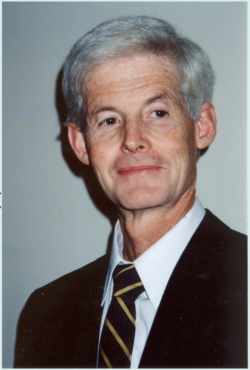
Stephen A. Cook $\star$ 1939

- Informatik-Professor and der Universität Toronto
- 1971: „Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (SAT) ist NP-vollständig“
- Turing-Preisträger



Satz von Cook

Stephen A. Cook ⋆1939

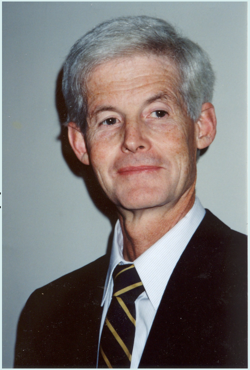


- Informatik-Professor and der Universität Toronto
- 1971: „Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (SAT) ist NP-vollständig"
- Turing-Preisträger

Satz von Cook

Stephen A. Cook $\star$ 1939

- Informatik-Professor and der Universität Toronto
- 1971: „Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (SAT) ist NP-vollständig“
- Turing-Preisträger



Teilklassen

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln A

- in KNF ist NP-vollständig
- in 3-KNF ist NP-vollständig
- in 2-KNF ist polynomial entscheidbar
- in DNF ist polynomiell entscheidbar ($O(n \log n)$ oder besser)

- k-KNF Formeln sind Konjunktionen von Disjunktionen mit höchstens k Literalen.
- 2-KNF Formeln heißen auch Krom Formeln.

Teilklassen

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln A

- in KNF ist NP-vollständig
- in 3-KNF ist NP-vollständig
- in 2-KNF ist polynomial entscheidbar
- in DNF ist polynomiell entscheidbar ($O(n \log n)$ oder besser)

- k-KNF Formeln sind Konjunktionen von Disjunktionen mit höchstens k Literalen.
- 2-KNF Formeln heißen auch Krom Formeln.

Teilklassen

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln A

- in KNF ist NP-vollständig
- in 3-KNF ist NP-vollständig
- in 2-KNF ist polynomial entscheidbar
- in DNF ist polynomiell entscheidbar ($O(n \log n)$ oder besser)

- k-KNF Formeln sind Konjunktionen von Disjunktionen mit höchstens k Literalen.
- 2-KNF Formeln heißen auch Krom Formeln.

Teilklassen

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln A

- in KNF ist NP-vollständig
- in 3-KNF ist NP-vollständig
- in 2-KNF ist polynomial entscheidbar
- in DNF ist polynomiell entscheidbar ($O(n \log n)$ oder besser)

- k-KNF Formeln sind Konjunktionen von Disjunktionen mit höchstens k Literalen.
- 2-KNF Formeln heißen auch Krom Formeln.

Teilklassen

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln A

- in KNF ist NP-vollständig
- in 3-KNF ist NP-vollständig
- in 2-KNF ist polynomial entscheidbar
- in DNF ist polynomiell entscheidbar ($O(n \log n)$ oder besser)

- k-KNF Formeln sind Konjunktionen von Disjunktionen mit höchstens k Literalen.
- 2-KNF Formeln heißen auch Krom Formeln.

Teilklassen

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln A

- in KNF ist NP-vollständig
- in 3-KNF ist NP-vollständig
- in 2-KNF ist polynomial entscheidbar
- in DNF ist polynomiell entscheidbar ($O(n \log n)$ oder besser)

- k-KNF Formeln sind Konjunktionen von Disjunktionen mit höchstens k Literalen.
- 2-KNF Formeln heißen auch Krom Formeln.

Horn Formeln

Definition

Eine *Horn-Formel* ist eine aussagenlogische Formel in KNF, in der jede Disjunktion höchstens ein positives Literale enthält. Eine solche Disjunktion heißt eine *Horn-Klausel*.

Alternative Schreibweise:

$\neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_m \vee A$	$B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \rightarrow A$
$\neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_m$	$B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \rightarrow \mathbf{0}$
A	A

Dabei heißt $B_1 \wedge \ldots \wedge B_m$ der *Rumpf* und A der *Kopf* der Horn-Klausel $B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \rightarrow A$.

Horn Formeln

Definition

Eine *Horn-Formel* ist eine aussagenlogische Formel in KNF, in der jede Disjunktion höchstens ein positives Literale enthält. Eine solche Disjunktion heißt eine *Horn-Klausel*.

Alternative Schreibweise:

$\neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_m \vee A$	$B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \rightarrow A$
$\neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_m$	$B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \rightarrow \mathbf{0}$
A	A

Dabei heißt $B_1 \wedge \ldots \wedge B_m$ der *Rumpf* und A der *Kopf* der Horn-Klausel $B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \rightarrow A$.

Horn Formeln

Definition

Eine *Horn-Formel* ist eine aussagenlogische Formel in KNF, in der jede Disjunktion höchstens ein positives Literale enthält. Eine solche Disjunktion heißt eine *Horn-Klausel*.

Alternative Schreibweise:

$\neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_m \vee A$	$B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \rightarrow A$
$\neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_m$	$B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \rightarrow \mathbf{0}$
A	A

Dabei heißt $B_1 \wedge \ldots \wedge B_m$ der *Rumpf* und A der *Kopf* der Horn-Klausel $B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \rightarrow A$.

Beispiel einer Horn Formel

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg P \\
\wedge & (Q \vee \neg R \vee \neg S) \\
\wedge & (\neg Q \vee \neg S) \\
\wedge & R \wedge S \wedge (\neg Q \vee P)
\end{array}
$$

Alternative Schreibweise

$$
\begin{array}{ll}
 & (P \rightarrow \mathbf{0}) \\
\wedge & (R \wedge S \rightarrow Q) \\
\wedge & (Q \wedge S \rightarrow \mathbf{0}) \\
\wedge & R \wedge S \wedge (Q \rightarrow P)
\end{array}
$$

Erfüllbarkeitsproblem für Horn Formeln

Theorem

Für Horn-Formeln ist die Erfüllbarkeit in quadratischer Zeit entscheidbar.

Erfüllbarkeitstest

Sei $C = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m$ eine Hornformel.
Ein Atom in C *markieren*, bedeutet, es an allen Stellen seines Auftretens in C zu markieren.

- Schritt 0:
  Markiere alle Fakten. Wenn keine vorhanden sind: gib aus „erfüllbar" und halte an.
- Schritt 1:
  Suche nach einem $D_i = R_i \rightarrow K_i$ in C, so daß alle Atome im Rumpf markiert sind aber K_i noch nicht. Falls keines existiert, gebe aus „erfüllbar" und halte an.

  Andernfalls sei $R_j \rightarrow K_j$ das erste solche D_i.
  - falls $K_j \neq \mathbf{0}$: markiere K_j überall in C und wiederhole Schritt 1.
  - falls $K_j = \mathbf{0}$: gebe aus „unerfüllbar" und halte an.

Erfüllbarkeitstest

Sei $C = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m$ eine Hornformel.
Ein Atom in C *markieren*, bedeutet, es an allen Stellen seines Auftretens in C zu markieren.

- Schritt 0:
  Markiere alle Fakten. Wenn keine vorhanden sind: gib aus „erfüllbar“ und halte an.
- Schritt 1:
  Suche nach einem $D_i = R_i \rightarrow K_i$ in C, so daß alle Atome im Rumpf markiert sind aber K_i noch nicht. Falls keines existiert, gebe aus „erfüllbar“ und halte an.
  Andernfalls sei $R_j \rightarrow K_j$ das erste solche D_i.
  - falls $K_j \neq \mathbf{0}$: markiere K_j überall in C und wiederhole Schritt 1.
  - falls $K_j = \mathbf{0}$: gebe aus „unerfüllbar“ und halte an.

Erfüllbarkeitstest

Sei $C = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m$ eine Hornformel.
Ein Atom in C *markieren*, bedeutet, es an allen Stellen seines Auftretens in C zu markieren.

- Schritt 0:
  Markiere alle Fakten. Wenn keine vorhanden sind: gib aus „erfüllbar“ und halte an.
- Schritt 1:
  Suche nach einem $D_i = R_i \rightarrow K_i$ in C, so daß alle Atome im Rumpf markiert sind aber K_i noch nicht. Falls keines existiert, gebe aus „erfüllbar“ und halte an.

  Andernfalls sei $R_j \rightarrow K_j$ das erste solche D_i.
  - falls $K_j \neq \mathbf{0}$: markiere K_j überall in C und wiederhole Schritt 1.
  - falls $K_j = \mathbf{0}$: gebe aus „unerfüllbar“ und halte an.

Erfüllbarkeitstest

Sei $C = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m$ eine Hornformel.
Ein Atom in C *markieren*, bedeutet, es an allen Stellen seines Auftretens in C zu markieren.

- Schritt 0:
  Markiere alle Fakten. Wenn keine vorhanden sind: gib aus „erfüllbar“ und halte an.
- Schritt 1:
  Suche nach einem $D_i = R_i \to K_i$ in C, so daß alle Atome im Rumpf markiert sind aber K_i noch nicht. Falls keines existiert, gebe aus „erfüllbar“ und halte an.

  Andernfalls sei $R_j \to K_j$ das erste solche D_i.
  - falls $K_j \neq \mathbf{0}$: markiere K_j überall in C und wiederhole Schritt 1.
  - falls $K_j = \mathbf{0}$: gebe aus „unerfüllbar“ und halte an.

Erfüllbarkeitstest

p

q

$q \wedge r \rightarrow s$

$p \rightarrow r$

$s \rightarrow 0$

Erfüllbarkeitstest

p

q

$q \wedge r \rightarrow s$

$p \rightarrow r$

$s \rightarrow 0$

Erfüllbarkeitstest

p

q

$q \land r \rightarrow s$

$p \rightarrow r$

$s \rightarrow 0$

Erfüllbarkeitstest

p

q

$q \wedge r \rightarrow s$

$p \rightarrow r$

$s \rightarrow 0$

Erfüllbarkeitstest

p

q

$q \wedge r \rightarrow s$

$p \rightarrow r$

$s \rightarrow 0$

Erfüllbarkeitstest

p

q

$q \wedge r \rightarrow s$

$p \rightarrow r$

$s \rightarrow 0$

Erfüllbarkeitstest

p

q

$q \wedge r \rightarrow s$

$p \rightarrow r$

$s \rightarrow 0$

Erfüllbarkeitstest

p

q

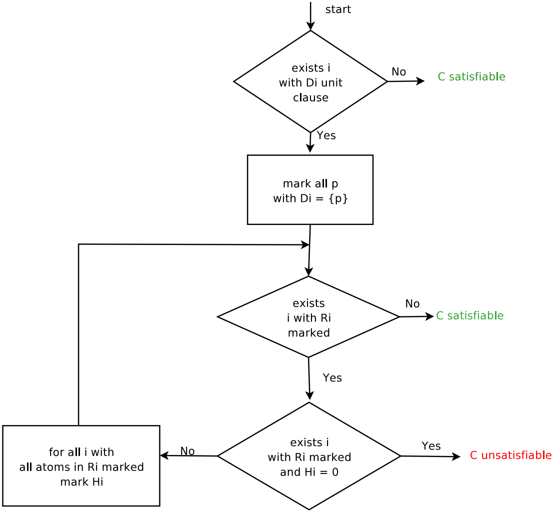
$q \wedge r \rightarrow s$

$p \rightarrow r$

$s \rightarrow 0$

Formelmenge nicht erfüllbar

Flußdiagramm



Korrektheitsaussagen

Da höchstens so viele Schritte zu machen sind, wie es Atome in C gibt, hat der Algorithmus einen quadratischen Zeitaufwand.
Zu zeigen ist noch, dass

1. wenn der Algorithmus mit „erfüllbar“ endet, auch eine erfüllende Belegung gefunden werden kann und
2. wenn C erfüllbar ist, der Algorithmus mit „erfüllbar“ abbricht.

Korrektheitsaussagen

Da höchstens so viele Schritte zu machen sind, wie es Atome in C gibt, hat der Algorithmus einen quadratischen Zeitaufwand. Zu zeigen ist noch, dass

1. wenn der Algorithmus mit „erfüllbar“ endet, auch eine erfüllende Belegung gefunden werden kann und
2. wenn C erfüllbar ist, der Algorithmus mit „erfüllbar“ abbricht.

Korrektheitsbeweis
Teil 1

Angenommen der Algorithmus endet mit der Ausgabe „erfüllbar“. Wir definieren I durch:

$$I(P) = W \quad \Leftrightarrow \quad P \text{ wurde markiert.}$$

Wir zeigen:
$val_I(D_i) = W$ für $i = 1, \ldots, m$,
woraus $val_I(C) = W$ folgt.
Fallunterscheidungen:

1. D_i ist ein Atom
2. $D_i = R_i \to \mathbf{0}$
3. $D_i = R_i \to K_i$

Korrektheitsbeweis
Teil 1

Angenommen der Algorithmus endet mit der Ausgabe „erfüllbar“. Wir definieren I durch:

$$I(P) = W \quad \Leftrightarrow \quad P \text{ wurde markiert.}$$

Wir zeigen:
$val_I(D_i) = W$ für $i = 1, \ldots, m$,
woraus $val_I(C) = W$ folgt.
Fallunterscheidungen:

1. D_i ist ein Atom
2. $D_i = R_i \rightarrow \mathbf{0}$
3. $D_i = R_i \rightarrow K_i$

Korrektheitsbeweis
Teil 1

Angenommen der Algorithmus endet mit der Ausgabe „erfüllbar". Wir definieren I durch:

$$I(P) = W \quad \Leftrightarrow \quad P \text{ wurde markiert.}$$

Wir zeigen:
$val_I(D_i) = W$ für $i = 1, \ldots, m$,
woraus $val_I(C) = W$ folgt.
Fallunterscheidungen:

1. D_i ist ein Atom
2. $D_i = R_i \rightarrow \mathbf{0}$
3. $D_i = R_i \rightarrow K_i$

Korrektheitsbeweis Teil 2

Sei I eine Interpretation mit $val_I(C) = W$.

Wir zeigen für jedes markierte Atom A $val_I(A) = W$.

Daraus folgt, dass der Algorithmus nicht mit „unerfüllbar“ abbrechen kann, da nicht alle Atome in einer Horn-Klausel der Form $R_i \rightarrow \mathbf{0}$ markiert werden können.

Korrektheitsbeweis
Teil 2

Sei I eine Interpretation mit $val_I(C) = W$.

Wir zeigen für jedes markierte Atom A $val_I(A) = W$.

Daraus folgt, dass der Algorithmus nicht mit „unerfüllbar“ abbrechen kann, da nicht alle Atome in einer Horn-Klausel der Form $R_i \rightarrow \mathbf{0}$ markiert werden können.

Korrektheitsbeweis Teil 2

Sei I eine Interpretation mit $val_I(C) = W$.

Wir zeigen für jedes markierte Atom A $val_I(A) = W$.

Daraus folgt, dass der Algorithmus nicht mit „unerfüllbar“ abbrechen kann, da nicht alle Atome in einer Horn-Klausel der Form $R_i \rightarrow \mathbf{0}$ markiert werden können.

Für jedes markierte Atom: $val_I(A) = W$

Induktion nach Anzahl der Durchläufe.

Offensichtlich wahr für die Markierungen im Schritt 0.

Angenommen das Atom A wird im $(t+1)$-ten Durchlauf markiert.

Dann gibt es ein $D_i = R_i \rightarrow A$ in C, so dass im t-ten Durchlauf alle Atome von R_i markiert waren.

Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass $val_I(R_i) = W$ gilt. Da ausserdem nach Annahme $val_I(D_i) = W$ sein soll, gilt auch $val_I(A) = W$.

Für jedes markierte Atom: $val_I(A) = W$

Induktion nach Anzahl der Durchläufe.

Offensichtlich wahr für die Markierungen im Schritt 0.

Angenommen das Atom A wird im $(t + 1)$-ten Durchlauf markiert.

Dann gibt es ein $D_i = R_i \to A$ in C, so dass im t-ten Durchlauf alle Atome von R_i markiert waren.

Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass $val_I(R_i) = W$ gilt. Da ausserdem nach Annahme $val_I(D_i) = W$ sein soll, gilt auch $val_I(A) = W$.

Für jedes markierte Atom: $val_I(A) = W$

Induktion nach Anzahl der Durchläufe.

Offensichtlich wahr für die Markierungen im Schritt 0.

Angenommen das Atom A wird im $(t + 1)$-ten Durchlauf markiert.

Dann gibt es ein $D_i = R_i \rightarrow A$ in C, so dass im t-ten Durchlauf alle Atome von R_i markiert waren.

Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass $val_I(R_i) = W$ gilt. Da ausserdem nach Annahme $val_I(D_i) = W$ sein soll, gilt auch $val_I(A) = W$.

Für jedes markierte Atom: $val_I(A) = W$

Induktion nach Anzahl der Durchläufe.

Offensichtlich wahr für die Markierungen im Schritt 0.

Angenommen das Atom A wird im $(t+1)$-ten Durchlauf markiert.

Dann gibt es ein $D_i = R_i \rightarrow A$ in C, so dass im t-ten Durchlauf alle Atome von R_i markiert waren.

Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass $val_I(R_i) = W$ gilt. Da ausserdem nach Annahme $val_I(D_i) = W$ sein soll, gilt auch $val_I(A) = W$.

Für jedes markierte Atom: $val_I(A) = W$

Induktion nach Anzahl der Durchläufe.

Offensichtlich wahr für die Markierungen im Schritt 0.

Angenommen das Atom A wird im $(t+1)$-ten Durchlauf markiert.

Dann gibt es ein $D_i = R_i \to A$ in C, so dass im t-ten Durchlauf alle Atome von R_i markiert waren.

Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass $val_I(R_i) = W$ gilt. Da ausserdem nach Annahme $val_I(D_i) = W$ sein soll, gilt auch $val_I(A) = W$.

Äquivalenzformeln

Wir betrachten das Fragment *ÄqFor* aussagenlogischer Formeln, das einzig aus

$$\leftrightarrow, \mathbf{1}, \mathbf{0}$$

und aussagenlogischen Variablen aufgebaute Formeln enthält.

Theorem

Eine Formel A aus ÄqFor ist eine Tautologie
gdw.
jede Aussagenvariable hat eine gerade Anzahl von Vorkommen in A
und die Konstante $\mathbf{0}$ *hat eine gerade Anzahl von Vorkommen in A.*

Äquivalenzformeln

Wir betrachten das Fragment *ÄqFor* aussagenlogischer Formeln, das einzig aus

$$\leftrightarrow, \mathbf{1}, \mathbf{0}$$

und aussagenlogischen Variablen aufgebaute Formeln enthält.

Theorem

Eine Formel A aus ÄqFor ist eine Tautologie
gdw.
jede Aussagenvariable hat eine gerade Anzahl von Vorkommen in A
und die Konstante **0** *hat eine gerade Anzahl von Vorkommen in A.*

Beispiele

$$\Big((P \leftrightarrow \mathbf{1}) \leftrightarrow (\mathbf{0} \leftrightarrow Q)\Big) \leftrightarrow \Big((P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \mathbf{0}\Big)$$

ist eine Tautologie,

$$\Big((P \leftrightarrow \mathbf{0}) \leftrightarrow P\Big) \leftrightarrow \Big(Q \leftrightarrow (\mathbf{0} \leftrightarrow P) \leftrightarrow P\Big)$$

ist keine Tautologie.

Beweis des 1. Beispiels

Es gilt die Assoziativität

$$[(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow Z] \leftrightarrow [X \leftrightarrow (Y \leftrightarrow Z)]$$

$\big((P \leftrightarrow \mathbf{1}) \leftrightarrow (\mathbf{0} \leftrightarrow Q)\big) \leftrightarrow \big((P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \mathbf{0}\big)$	*Geg.*
$P \leftrightarrow \mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow Q \leftrightarrow P \leftrightarrow Q \leftrightarrow \mathbf{0}$	*Assoz.*
$\mathbf{1} \leftrightarrow P \leftrightarrow P \leftrightarrow Q \leftrightarrow Q \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{0}$	*Komm.*
$\mathbf{1}$	$(X \leftrightarrow X) \leftrightarrow \mathbf{1}$

Tautologie

Beweis des 1. Beispiels

Es gilt die Assoziativität

$$[(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow Z] \leftrightarrow [X \leftrightarrow (Y \leftrightarrow Z)]$$

$\big((P \leftrightarrow \mathbf{1}) \leftrightarrow (\mathbf{0} \leftrightarrow Q)\big) \leftrightarrow \big((P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \mathbf{0}\big)$	*Geg.*
$P \leftrightarrow \mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow Q \leftrightarrow P \leftrightarrow Q \leftrightarrow \mathbf{0}$	*Assoz.*
$\mathbf{1} \leftrightarrow P \leftrightarrow P \leftrightarrow Q \leftrightarrow Q \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{0}$	*Komm.*
$\mathbf{1}$	$(X \leftrightarrow X) \leftrightarrow \mathbf{1}$

Tautologie

Beweis des 1. Beispiels

Es gilt die Assoziativität

$$[(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow Z] \leftrightarrow [X \leftrightarrow (Y \leftrightarrow Z)]$$

$\Big((P \leftrightarrow \mathbf{1}) \leftrightarrow (\mathbf{0} \leftrightarrow Q)\Big) \leftrightarrow \Big((P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \mathbf{0}\Big)$	*Geg.*
$P \leftrightarrow \mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow Q \leftrightarrow P \leftrightarrow Q \leftrightarrow \mathbf{0}$	*Assoz.*
$\mathbf{1} \leftrightarrow P \leftrightarrow P \leftrightarrow Q \leftrightarrow Q \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{0}$	*Komm.*
$\mathbf{1}$	$(X \leftrightarrow X) \leftrightarrow \mathbf{1}$
Tautologie	

Beweis des 1. Beispiels

Es gilt die Assoziativität

$$[(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow Z] \leftrightarrow [X \leftrightarrow (Y \leftrightarrow Z)]$$

$\big((P \leftrightarrow \mathbf{1}) \leftrightarrow (\mathbf{0} \leftrightarrow Q)\big) \leftrightarrow \big((P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \mathbf{0}\big)$	*Geg.*
$P \leftrightarrow \mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow Q \leftrightarrow P \leftrightarrow Q \leftrightarrow \mathbf{0}$	*Assoz.*
$\mathbf{1} \leftrightarrow P \leftrightarrow P \leftrightarrow Q \leftrightarrow Q \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{0}$	*Komm.*
$\mathbf{1}$	$(X \leftrightarrow X) \leftrightarrow \mathbf{1}$
Tautologie	

Beweis des 1. Beispiels

Es gilt die Assoziativität

$$[(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow Z] \leftrightarrow [X \leftrightarrow (Y \leftrightarrow Z)]$$

$$
\begin{array}{lr}
\Big((P \leftrightarrow \mathbf{1}) \leftrightarrow (\mathbf{0} \leftrightarrow Q)\Big) \leftrightarrow \Big((P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \mathbf{0}\Big) & \mathit{Geg.} \\
P \leftrightarrow \mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow Q \leftrightarrow P \leftrightarrow Q \leftrightarrow \mathbf{0} & \mathit{Assoz.} \\
\mathbf{1} \leftrightarrow P \leftrightarrow P \leftrightarrow Q \leftrightarrow Q \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{0} & \mathit{Komm.} \\
\mathbf{1} & (X \leftrightarrow X) \leftrightarrow \mathbf{1}
\end{array}
$$

Tautologie

Beweis des 1. Beispiels

Es gilt die Assoziativität

$$[(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow Z] \leftrightarrow [X \leftrightarrow (Y \leftrightarrow Z)]$$

$$\begin{array}{lr}
\Big((P \leftrightarrow \mathbf{1}) \leftrightarrow (\mathbf{0} \leftrightarrow Q)\Big) \leftrightarrow \Big((P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \mathbf{0}\Big) & \textit{Geg.} \\
\quad P \leftrightarrow \mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow Q \leftrightarrow P \leftrightarrow Q \leftrightarrow \mathbf{0} & \textit{Assoz.} \\
\quad \mathbf{1} \leftrightarrow P \leftrightarrow P \leftrightarrow Q \leftrightarrow Q \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{0} & \textit{Komm.} \\
\quad \mathbf{1} & (X \leftrightarrow X) \leftrightarrow \mathbf{1}
\end{array}$$

Tautologie

Beweis des 2. Beispiels

$\big((P \leftrightarrow \mathbf{0}) \leftrightarrow P\big) \leftrightarrow \big(Q \leftrightarrow (\mathbf{0} \leftrightarrow P) \leftrightarrow P\big)$	*Geg.*
$P \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow P \leftrightarrow Q \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow P \leftrightarrow P$	*Assoz.*
$P \leftrightarrow P \leftrightarrow P \leftrightarrow P \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow Q$	*Komm.*
Q	$(X \leftrightarrow X) \leftrightarrow \mathbf{1}$

keine Tautologie

Beweis des 2. Beispiels

$\Big((P \leftrightarrow \mathbf{0}) \leftrightarrow P\Big) \leftrightarrow \Big(Q \leftrightarrow (\mathbf{0} \leftrightarrow P) \leftrightarrow P\Big)$	*Geg.*
$P \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow P \leftrightarrow Q \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow P \leftrightarrow P$	*Assoz.*
$P \leftrightarrow P \leftrightarrow P \leftrightarrow P \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow Q$	*Komm.*
Q	$(X \leftrightarrow X) \leftrightarrow \mathbf{1}$

keine Tautologie

Beweis des 2. Beispiels

$$\big((P \leftrightarrow \mathbf{0}) \leftrightarrow P\big) \leftrightarrow \big(Q \leftrightarrow (\mathbf{0} \leftrightarrow P) \leftrightarrow P\big) \qquad \textit{Geg.}$$
$$P \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow P \leftrightarrow Q \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow P \leftrightarrow P \qquad \textit{Assoz.}$$
$$P \leftrightarrow P \leftrightarrow P \leftrightarrow P \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow Q \qquad \textit{Komm.}$$
$$Q \qquad (X \leftrightarrow X) \leftrightarrow \mathbf{1}$$

keine Tautologie

Beweis des 2. Beispiels

$$\Big((P \leftrightarrow \mathbf{0}) \leftrightarrow P\Big) \leftrightarrow \Big(Q \leftrightarrow (\mathbf{0} \leftrightarrow P) \leftrightarrow P\Big) \qquad \textit{Geg.}$$

$$P \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow P \leftrightarrow Q \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow P \leftrightarrow P \qquad \textit{Assoz.}$$

$$P \leftrightarrow P \leftrightarrow P \leftrightarrow P \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow Q \qquad \textit{Komm.}$$

$$Q \qquad (X \leftrightarrow X) \leftrightarrow \mathbf{1}$$

keine Tautologie

Beweis des 2. Beispiels

$\big((P \leftrightarrow \mathbf{0}) \leftrightarrow P\big) \leftrightarrow \big(Q \leftrightarrow (\mathbf{0} \leftrightarrow P) \leftrightarrow P\big)$	*Geg.*
$P \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow P \leftrightarrow Q \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow P \leftrightarrow P$	*Assoz.*
$P \leftrightarrow P \leftrightarrow P \leftrightarrow P \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow Q$	*Komm.*
Q	$(X \leftrightarrow X) \leftrightarrow \mathbf{1}$

keine Tautologie