Formale Systeme

Aussagenlogik: Tableaukalkül

Prof. Dr. Bernhard Beckert | WS 2009/2010

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Kalküle für die Aussagenlogik

1. Hilbert-Kalkül
2. Resolutionskalkül
3. Tableaukalkül
4. Sequenzenkalkül

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit

$$M \models A \quad \Leftrightarrow \quad M \cup \{\neg A\} \vdash_{\mathbf{T0}} \mathbf{0}.$$

- Beweis durch Fallunterscheidung
- Top-down-Analyse der gegebenen Formeln

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Vorteile

- Intuitiver als Resolution
- Formeln müssen nicht in Normalform sein
- Falls Formelmenge erfüllbar ist (Test schlägt fehl), wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

Nachteil

- Mehr als eine Regel

Kleine Deutsch- und Englischsstunde

Deutsch

das	Tableau	
des	Tableau<u>s</u>	(Gen.)
die	Tableau<u>s</u>	(pl.)
der	Tableaukalkül	(*nicht* das)

Englisch

the	tableau	(sing.)
the	tableaux	(pl.)
the	tableau calculus	

Vorzeichenformel

Definition (Vorzeichenformel)

Eine **Vorzeichenformel** ist eine Zeichenkette der Gestalt

$$0A \text{ oder } 1A \qquad \text{mit } A \in For0.$$

0, 1 sind neue Sonderzeichen (die Vorzeichen) im Alphabet der Objektsprache.

Definition

Wir setzen val_I fort auf die Menge aller Vorzeichenformeln durch

$$val_I(0A) = val_I(\neg A),$$

und

$$val_I(1A) = val_I(A).$$

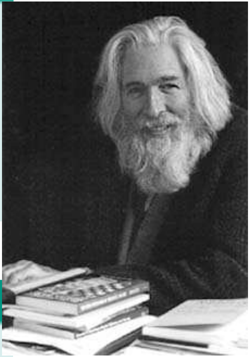
Uniforme Notation

Konjunktive Formeln: Typ α

- $1(A \wedge B)$
- $0(A \vee B)$
- $0(A \rightarrow B)$
- $0\neg A$
- $1\neg A$

Disjunktive Formeln: Typ β

- $0(A \wedge B)$
- $1(A \vee B)$
- $1(A \rightarrow B)$



Raymond Smullyan

Uniforme Notation

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

α	α_1	α_2
$1(A \wedge B)$	$1A$	$1B$
$0(A \vee B)$	$0A$	$0B$
$0(A \rightarrow B)$	$1A$	$0B$
$0\neg A$	$1A$	$1A$
$1\neg A$	$0A$	$0A$

β	β_1	β_2
$0(A \wedge B)$	$0A$	$0B$
$1(A \vee B)$	$1A$	$1B$
$1(A \rightarrow B)$	$0A$	$1B$

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{l}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$

konjunktiv

$$\begin{array}{c}1(p \land q)\\ |\\ 1p\\ |\\ 1q\end{array}$$

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

disjunktiv

$$\begin{array}{ccc} & 1(p \lor q) & \\ \swarrow & & \searrow \\ 1p & & 1q\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}1F\\ 0F\end{array}}{*} \qquad \frac{\mathbf{01}}{*} \qquad \frac{\mathbf{10}}{*}$$

Widerspruch

$$\begin{array}{c}1F\\ |\\ 0F\\ |\\ *\end{array} \qquad \begin{array}{c}0\mathbf{1}\\ |\\ *\end{array} \qquad \begin{array}{c}1\mathbf{0}\\ |\\ *\end{array}$$

Instanzen der α- und β-Regel

Instanzen der α-Regel

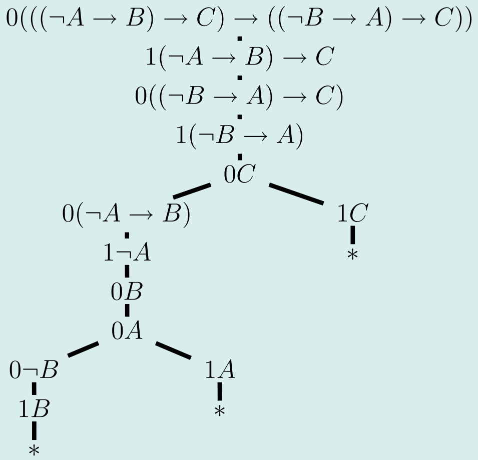
$$\frac{1(P \wedge Q)}{\begin{array}{c}1P\\1Q\end{array}} \qquad \frac{0(P \vee Q)}{\begin{array}{c}0P\\0Q\end{array}} \qquad \frac{0(P \rightarrow Q)}{\begin{array}{c}1P\\0Q\end{array}} \qquad \frac{0\neg P}{1P} \qquad \frac{1\neg P}{0P}$$

Instanzen der β-Regel

$$\frac{1(P \vee Q)}{1P \mid 1Q} \qquad \frac{0(P \wedge Q)}{0P \mid 0Q} \qquad \frac{1(P \rightarrow Q)}{0P \mid 1Q}$$

Beispiel:

$$\models (((\neg A \to B) \to C) \to ((\neg B \to A) \to C))$$



Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch
- Der Kalkül aber nicht:
  Wahl der nächsten Formel, auf die Regel angewendet wird

Heuristik

Nicht-verzweigende Regeln zuerst: „α vor β“

Nota bene

Selbe Formel kann mehrfach (auf verschiedenen Ästen) verwendet werden

Formale Definition des Kalküls

Definition: Tableau

Binärer Baum, dessen Knoten mit Formeln markiert sind

Definition: Tableauast

Maximaler Pfad in Einem Tableau (von Wurzel zu Blatt)

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge, sei A eine Formel

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten $0A$ besteht,
ist ein Tableau für A über M (d.h., für $M \models A$)

Erweiterung

- T ein Tableau für A über M
- B ein Ast von T
- F eine Formel auf B, die kein Literal ist

T' entstehe durch Erweiterung von B gemäß
der auf F anwendbaren Regel (α oder β)
Dann ist T' ein Tableau für A über M

Formale Definition des Kalküls

Voraussetzungsregel

- T ein Tableau für A über M
- F eine Formel in M

T' entstehe durch Erweiterung eines beliebigen Astes durch $1F$
Dann ist T' ein Tableau für A über M

Formale Definition des Kalküls

Definition: Geschlossener Ast

Ast B eines Tableaus ist geschlossen, wenn

$$1F, 0F \quad \in \quad B \quad \text{oder} \quad \mathbf{1}0 \in B \quad \text{oder} \quad 0\mathbf{1} \in B$$

Definition: Geschlossenes Tableau

Ein Tableau ist geschlossen, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist

Definition: Tableaubeweis

Ein Tableau für A über M, das geschlossen ist,
ist ein Tableaubeweis für $M \cup \{\neg A\} \vdash_{T0} \mathbf{0}$ und damit für $M \models A$

Korrektheit und Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem

Es gilt $M \models A$
genau dann, wenn
es einen Tableaubeweis für A über M gibt

Kern des Korrektheitsbeweises

Definition: Erfüllbares Tableau

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist
Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma

Jedes Tableau für A über M ist erfüllbar,
falls $M \cup \{\neg A\}$ erfüllbar ist.

Lemma

Ein geschlossenes Tableau ist nicht erfüllbar

Korrektheitslemma

Initialisierung: I ist Modell von $M \cup \{\neg A\}$, also von $0A$.

Voraussetzung: I ist Modell von $M \cup \{\neg A\}$,
also von $1F$ für alle $F \in M$.

α-Fall (β-Fall analog):

- Nach Ind.-Ann. erfüllt I einen Ast π in T.
- Zur Anwendung der α-Regel wird ein Ast π_1 in T und eine α-Formel α auf π_1 gewählt, π_1 wird verlängert um α_1, α_2.
- Wenn $\pi_1 \neq \pi$, ist π ein Ast in T', und damit (trivial) auch T' erfüllt.
- Wenn $\pi_1 = \pi$, haben wir aus $val_I(\pi) = W$, dass $val_I(\alpha) = W$, also $val_I(\alpha_1) = W$ und $val_I(\alpha_2) = W$.
- Somit $val_I(\pi') = W$ für den neu entstehenden Pfad π', d.h. T' ist erfüllbar

Kern des Vollständigkeitsbeweises

Definition: Voll expandiertes Tableau

Ein Tableau heißt voll expandiert, wenn

- jede Regel
- auf jede passende Formel
- auf jedem offenen Ast

angewendet worden ist und

- für jedes $F \in M$ (hierfür muss M endlich sein)
- für jeden Ast B

$1F$ auf B vorkommt

Kern des Vollständigkeitsbeweises

Lemma

B ein offener Ast in einem voll expandiertem Tableau,
dann ist B erfüllbar

Also

Ist $M \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar
und also jeder Ast eines jeden Tableaus für A über M unerfüllbar,
dann ist jedes voll expandierte Tableau für A über M geschlossen
(denn sonst wäre er wegen des Lemmas erfüllbar)

Kern des Vollständigkeitsbeweises

Beweis

Sei B ein offener Ast eines voll expandierten Tableaus

Wir definieren

$$I(P) := \begin{cases} W & \text{falls } 1P \in B \\ F & \text{falls } 0P \in B \\ \text{bel.} & \text{sonst} \end{cases}$$

Durch Induktion zeigt man leicht:
$val_I(F) = W$ für jedes F auf B.

Es folgt, dass I Modell von $M \cup \{\neg A\}$ ist.