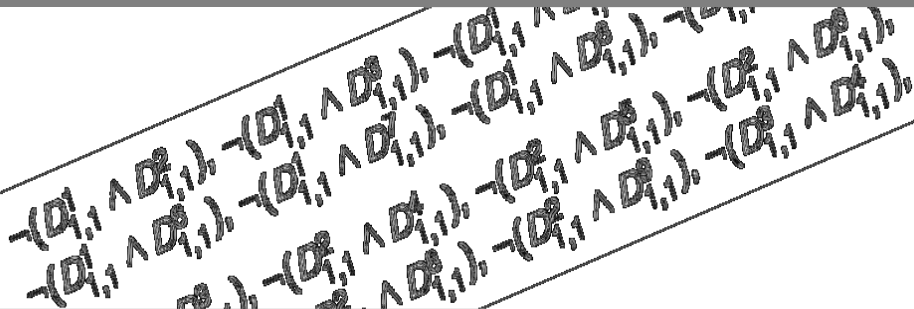


# Formale Systeme

## Prädikatenlogik: Semantik

Prof. Dr. Bernhard Beckert | WS 2009/2010

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Ist die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y( in(y, x) \wedge kl(y) ),$$

wahr?

Die Signatur  $\Sigma = \{k( ), q( ), d( ), kl( ), gr( ), in( , )\}$  liegt fest.

Die Wahrheit ist abhängig von

- einer Interpretation  $(\mathcal{D}, I)$
- einer Variablenbelegung  $\beta$

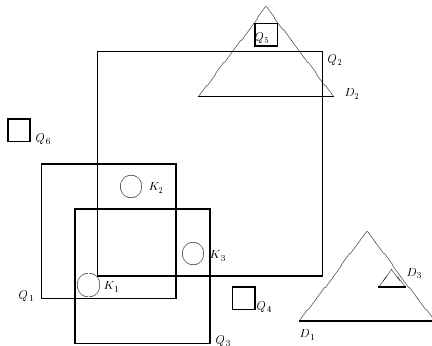
## Definition

Es sei  $\Sigma$  eine Signatur der PL1.

Eine *Interpretation*  $\mathcal{D}$  von  $\Sigma$  ist ein Paar  $(D, I)$  mit

- 1  $D$  ist eine beliebige, nichtleere Menge
- 2  $I$  ist eine Abbildung der Signatursymbole, die
  - jeder Konstanten  $c$  ein Element  $I(c) \in D$
  - für  $n \geq 1$ : jedem  $n$ -stelligen Funktionssymbol  $f$  eine Funktion  $I(f) : D^n \rightarrow D$
  - jedem 0-stelligen Prädikatsymbol  $P$  einen Wahrheitswert  $I(P) \in \{W, F\}$
  - für  $n \geq 1$ : jedem  $n$ -stelligen Prädikatsymbol  $p$  eine  $n$ -stellige Relation  $I(p) \subseteq D^n$  zuordnet.

# Beispiel einer Interpretation (Tarski's World)



$P_{\Sigma} = \{k(), q(), d(), kl(), gr(), in(, )\}$   $D_{Bsp} = \{Q_i : 1 \leq i \leq 6\} \cup \{K_1, K_2, K_3, D_1, D_2, D_3\}$

$I_{Bsp}(q) = \{Q_i : 1 \leq i \leq 6\}$

$I_{Bsp}(k) = \{K_1, K_2, K_3\}$ ,  $I_{Bsp}(d) = \{D_1, D_2, D_3\}$

$I_{Bsp}(in) = \{(K_1, Q_1), (K_1, Q_3), (K_2, Q_1), (K_2, Q_2), (K_3, Q_2), (K_3, Q_3), (D_3, D_1), (Q_5, D_2)\}$

## Definition

Es sei  $(D, I)$  eine Interpretation von  $\Sigma$ .

Eine *Variablenbelegung* (oder kurz *Belegung* über  $D$ ) ist eine Funktion

$$\beta : \text{Var} \rightarrow D.$$

Zu  $\beta$ ,  $x \in \text{Var}$  und  $d \in D$  definieren wir die *Modifikation* von  $\beta$  an der Stelle  $x$  zu  $d$ :

$$\beta_x^d(y) = \begin{cases} d & \text{falls } y = x \\ \beta(y) & \text{falls } y \neq x \end{cases}$$

## Definition

Es sei  $(D, I)$  eine Interpretation von  $\Sigma$  und  $\beta$  eine Variablenbelegung über  $D$ .

Wir definieren eine Funktion  $val_{D,I,\beta}$ , mit

$$val_{D,I,\beta}(t) \in D \text{ für } t \in Term_{\Sigma}$$

$$val_{D,I,\beta}(A) \in \{W, F\} \text{ für } A \in For_{\Sigma}$$

$val_{D,I,\beta}$  auf  $Term_{\Sigma}$ :

$$val_{D,I,\beta}(x) = \beta(x) \text{ für } x \in Var$$

$$val_{D,I,\beta}(f(t_1, \dots, t_n)) = (I(f))(val_{D,I,\beta}(t_1), \dots, val_{D,I,\beta}(t_n))$$

## Definition

$$1 \quad val_{D,I,\beta}(\mathbf{1}) = W$$

$$val_{D,I,\beta}(\mathbf{0}) = F$$

$$val_{D,I,\beta}(s \doteq t) := \begin{cases} W & \text{falls } val_{D,I,\beta}(s) = val_{D,I,\beta}(t) \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$$val_{D,I,\beta}(P) := I(P) \text{ f\u00fcr 0-stellige Pr\u00e4dikate } P$$

$$val_{D,I,\beta}(p(t_1, \dots, t_n)) :=$$

$$\begin{cases} W & \text{falls } (val_{D,I,\beta}(t_1), \dots, val_{D,I,\beta}(t_n)) \in I(p) \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

## Definition

- ②  $val_{D,I,\beta}(X)$  für  $X \in \{\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B\}$  wie in der Aussagenlogik.

Ferner:

$$val_{D,I,\beta}(\forall xA) :=$$

$$\begin{cases} W \text{ falls für alle } d \in D : val_{D,I,\beta_x^d}(A) = W \\ F \text{ sonst} \end{cases}$$

$$val_{D,I,\beta}(\exists xA) :=$$

$$\begin{cases} W \text{ falls ein } d \in D \text{ existiert mit } val_{D,I,\beta_x^d}(A) = W \\ F \text{ sonst} \end{cases}$$



Wir wollen die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y( in(y, x) \wedge kl(y) ),$$

in der Interpretation  $(\mathcal{D}_{Bsp}, I_{Bsp})$  aus der Abbildung mit der Variablenbelegung  $\beta(x) = Q_1$  auswerten.

Formel links von  $\rightarrow$

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(x) = Q_1 \in I(q), \text{ also } val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(q(x)) = W.$$

Formel rechts von  $\rightarrow$

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(\exists y( in(y, x) \wedge kl(y))) = W$$

Wähle  $K_1$  als Belegung für  $y$ .

Die weitere Auswertung führt zu

$$\text{val}_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}^{K_1} ((in(y, x) \wedge kl(y))) = W$$

weil  $(K_1, Q_1) \in I_{Bsp}(in)$  und  $K_1 \in I_{Bsp}(kl)$

Insgesamt

$$\text{val}_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(q(x) \rightarrow \exists y (in(y, x) \wedge kl(y))) = W$$

Signatur  $\Sigma_{arith} = \{+, *, \leq\}$

Die mathematischen ganzen Zahlen

$$\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, +_{\mathcal{Z}}, *_{\mathcal{Z}}, \leq_{\mathcal{Z}}).$$

Die ganzen Zahlen in Java

$$\mathcal{Z}_{Jint} = (\mathbb{Z}_{Jint}, +_{Jint}, *_{Jint}, \leq_{Jint}).$$

wobei:

$$\mathbb{Z}_{Jint} = [\text{minInt}, \text{maxInt}] = [-2147483648, 2147483647]$$

$$n +_{Jint} m = \text{nächste Folie}$$

$$n *_{Jint} m = \text{nächste Folie}$$

$$n \leq_{Jint} m \Leftrightarrow n \leq_{\mathcal{Z}} m$$

Für  $n, m \in [\text{minInt}, \text{maxInt}]$  gilt

$$n +_{\text{Jint}} m = \begin{cases} n +_Z m & \text{falls } n +_Z m \in [\text{minInt}, \text{maxInt}] \\ \text{minInt} -_Z 1 +_Z ((n +_Z m) -_Z \text{maxInt}) & \text{falls } n +_Z m > \text{maxInt} \\ \text{maxInt} + 1 + ((n +_Z m) - \text{minInt}) & \text{falls } n +_Z m < \text{minInt} \end{cases}$$

Z.B.

$$\text{maxInt} +_{\text{Jint}} 1 = \text{minInt} \text{ und } \text{minInt} -_{\text{Jint}} 1 = \text{maxInt}$$

Entsprechend für  $*_{\text{Jint}}$ .

# Vergleich von $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}_{Jint}$

| Formel $\phi$                                   | $\mathcal{Z} \models \phi$ | $\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$ |
|---|----------------------------|-----------------------------------|
| $\forall x \exists y (x < y)$                   | ja                         | nein                              |
| $\forall x \forall y ((x + 1) * y = x * y + y)$ | ja                         | ja                                |
| $\exists x (0 < x \wedge x + 1 < 0)$            | nein                       | ja                                |

## Theorem

$\mathcal{D}$  sei Interpretation,  $\beta, \gamma$  Variablenbelegungen

- 1 Gilt für den Term  $t$   $\beta(x) = \gamma(x)$  für alle  $x \in \text{Var}(t)$ , dann  $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(t) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(t)$ .
- 2 Gilt für die Formel  $A$   $\beta(x) = \gamma(x)$  für alle  $x \in \text{Frei}(A)$ , dann  $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(A)$ .
- 3 Ist  $A \in \text{For}_{\Sigma}$  geschlossen, dann gilt  $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(A)$

*Beweis:* Durch strukturelle Induktion unter Ausnutzung der Definition von  $\text{val}$ .

## Theorem

$\Sigma$  sei eine Signatur,  $\mathcal{D}$  eine Interpretation für  $\Sigma$ ,  
 $\beta$  eine Belegung,  $\sigma$  eine Substitution und  $t \in \text{Term}_\Sigma$ .

Dann gilt

$$\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t)) = \text{val}_{\mathcal{D},\beta'}(t).$$

wobei

$$\beta'(x) = \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x))$$

für alle  $x \in \text{Var}$ .

Strukturelle Induktion nach  $t$ .



Strukturelle Induktion nach  $t$ .  
 $t = x \in \mathit{Var}$ :

$$\begin{aligned} \mathit{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x)) &= \beta'(x) && \text{Def. von } \beta' \\ &= \mathit{val}_{\mathcal{D},\beta'}(x) && \text{Def. von } \mathit{val}(x) \end{aligned}$$

# Beweis

## Induktionsschritt

$$\begin{aligned} t = f(t_1, \dots, t_n): \\ \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) &= \\ &= \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \end{aligned}$$

# Beweis

## Induktionsschritt

$$\begin{aligned} t = f(t_1, \dots, t_n): \\ \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) &= \\ &= \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \end{aligned}$$

# Beweis

## Induktionsschritt

$$\begin{aligned} & t = f(t_1, \dots, t_n): \\ \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) &= \\ &= \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \\ &= I(f)(\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(t_1)), \dots, \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(t_n))) \end{aligned}$$

# Beweis

## Induktionsschritt

$$\begin{aligned} & t = f(t_1, \dots, t_n): \\ \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) &= \\ &= \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \\ &= I(f)(\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(t_1)), \dots, \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(t_n))) \end{aligned}$$

# Beweis

## Induktionsschritt

$$\begin{aligned} & t = f(t_1, \dots, t_n): \\ & \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) = \\ & = \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \\ & = I(f)(\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(t_1)), \dots, \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(t_n))) \\ & = I(f)(\text{val}_{\mathcal{D}, \beta_I}(t_1), \dots, \text{val}_{\mathcal{D}, \beta_I}(t_n)) \\ & \quad (\text{nach Induktionsannahme}) \end{aligned}$$

# Beweis

## Induktionsschritt

$$\begin{aligned} & t = f(t_1, \dots, t_n): \\ & \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) = \\ & = \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \\ & = I(f)(\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_1)), \dots, \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_n))) \\ & = I(f)(\text{val}_{\mathcal{D},\beta_I}(t_1), \dots, \text{val}_{\mathcal{D},\beta_I}(t_n)) \\ & \quad \text{(nach Induktionsannahme)} \end{aligned}$$

# Beweis

## Induktionsschritt

$$\begin{aligned} & t = f(t_1, \dots, t_n): \\ \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) &= \\ &= \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \\ &= I(f)(\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(t_1)), \dots, \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(t_n))) \\ &= I(f)(\text{val}_{\mathcal{D}, \beta'}(t_1), \dots, \text{val}_{\mathcal{D}, \beta'}(t_n)) \\ & \quad \text{(nach Induktionsannahme)} \\ &= \text{val}_{\mathcal{D}, \beta'}(f(t_1, \dots, t_n)). \end{aligned}$$



Es bezeichne  $F$  die Formel

$$p(x, z) \wedge \exists y(p(x, y) \wedge p(z, y) \rightarrow p(x, y))$$

Welche der folgenden Substitutionen ist kollisionsfrei für  $F$ ?

- |            |                        |                       |
|------------|------------------------|-----------------------|
| $\sigma_1$ | $\{x/a, z/b\}$         | <i>kollisionsfrei</i> |
| $\sigma_2$ | $\{x/(x+z), z/(x+z)\}$ | <i>kollisionsfrei</i> |
| $\sigma_3$ | $\{x/(x+y), z/a\}$     | <i>Kollision</i>      |
| $\sigma_4$ | $\{x/y\}$              | <i>Kollision</i>      |
| $\sigma_5$ | $\{x/z\}$              | <i>kollisionsfrei</i> |

## Theorem

$\Sigma$  sei eine Signatur,  $\mathcal{D}$  eine Interpretation für  $\Sigma$ ,  
 $\beta$  eine Belegung,  $A \in \text{For}_\Sigma$  und  
 $\sigma$  eine für  $A$  **kollisionsfreie** Substitution.

Dann gilt:

$$\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A)) = \text{val}_{\mathcal{D},\beta'}(A),$$

wobei

$$\beta'(x) = \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x))$$

für alle  $x \in \text{Var}$ .

Induktion nach  $A$ .

Exemplarisch: Schritt von  $A$  nach  $\exists xA$ .

Notation:  $val_{\beta}$  abkürzend für  $val_{D,\beta}$ .

Außerdem:  $\sigma_x(x) = x$ ,  $\sigma_x(y) = \sigma(y)$  für  $y \neq x$ .

$$val_{\beta}(\sigma(\exists xA)) = W \quad \text{gdw} \quad val_{\beta}(\exists x\sigma_x(A)) = W$$

Anwendung von  $\sigma$

$$\text{gdw} \quad val_{\beta_x^d}(\sigma_x(A)) = W \text{ für ein } d \in D$$

Def. von  $val$

$$\text{gdw} \quad val_{(\beta_x^d)''}(A) = W$$

Ind. Vor

wo  $(\beta_x^d)''(y) = val_{\beta_x^d}(\sigma_x(y))$  für all  $y$ .

$$\text{gdw} \quad val_{(\beta'_x)^d}(A) = W$$

Lücke

$$\text{gdw} \quad val_{\beta'}(\exists xA) = W$$

Def. von  $val$

Der Beweis wird vollständig geführt sein, wenn wir die Lücke

$$(\beta_x^d)'' = (\beta')_x^d$$

schließen können. Wir müssen für jede Variable  $y \in \text{Frei}(A)$  zeigen  $(\beta_x^d)''(y) = (\beta')_x^d(y)$ .

$$y = x:$$

|                    |     |                                       |                                    |
|--------------------|-----|---------------------------------------|------------------------------------|
| $(\beta_x^d)''(x)$ | $=$ | $\text{val}_{\beta_x^d}(\sigma_x(x))$ | Def. von $(\beta_x^d)''$           |
|                    | $=$ | $\text{val}_{\beta_x^d}(x)$           | Def. von $\sigma_x$                |
|                    | $=$ | $\beta_x^d(x)$                        | Def. von $\text{val}$ für Variable |
|                    | $=$ | $d$                                   | Def. der modifizierten Belegung    |
|                    | $=$ | $(\beta')_x^d(x)$                     | Def. der modifizierten Belegung    |

$y \neq x$ ,  $y$  frei in  $A$ :

$$(\beta_x^d)''(y) = \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma_x(y))$$

$$= \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma(y))$$

$$= \text{val}_{\beta}(\sigma(y))$$

$$= \beta'(y)$$

$$= (\beta')_x^d(y)$$

Def. von  $(\beta_x^d)''$

Def. von  $\sigma_x$

da  $x$  nicht in  $\sigma(y)$  vorkommt

Kollisionsfreiheit von  $\sigma$

Def. von  $\beta'$

Def. der modifizierten Belegung



Sir C.A.R. Hoare

Studied philosophy at Oxford U.

Graduate at Moscow State U. 1959

Programmer for Elliott Brothers, 1960

Prof. of CS at Queen's U. Belfast, 1968

*An axiomatic basis for computer  
programming*

Communications ACM, 1969

Oxford U. Programming Research, 1977

Microsoft Research, Cambridge, now

# Hoare-Kalkül und Substitutionslemma

Die Zuweisungsregel im Hoare-Kalkül lautet:

$$\{\{x/s\}A\} x := s \{A\}$$

wobei die Substitution  $\{x/s\}$  kollisionsfrei sein muß.  
Die Zuweisungsregel besagt, daß

- ausgehend von einem Zustand, in dem die Formel  $\{x/s\}A$  wahr ist,
- nach Ausführung der Programmstücks  $x := s$
- ein Zustand erreicht wird, in dem die Formel  $A$  gilt.

# Hoare-Kalkül und Substitutionslemma

Hintergrund-Interpretation  $\mathcal{H}$ .

Programmzustand= Variablenbelegung  $\beta$ .

Gelte  $val_{\mathcal{H},\beta}(\{x/s\}A) = W$

Nach der Zuweisung  $x := s$  wird ein Zustand  $\beta'$  erreicht

$$\beta'(y) := \begin{cases} val_{\mathcal{H},\beta}(s) & \text{falls } x = y \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Regel behauptet  $val_{\mathcal{H},\beta'}(A) = W$ .

Das ist gerade die Aussage des Substitutionslemmas für die Formel  $A$  ist und die Substitution  $\sigma = \{x/s\}$ .



## Theorem

Sei  $\Sigma$  eine Signatur,  $\mathcal{D}$  eine Interpretation für  $\Sigma$ ,  $\beta$  eine Belegung und  $\sigma$  eine für  $A$  kollisionsfreie Substitution mit  $\sigma(y) = y$  für alle Variablen  $y \neq x$ , dann gilt:

- $val_{\mathcal{D},\beta}(\forall xA \rightarrow \sigma(A)) = W$
- $val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A) \rightarrow \exists xA) = W.$

Wir nehmen an, daß  $val_{\mathcal{D},\beta}(\forall xA) = W$  gilt, d.h.

$$val_{\mathcal{D},\beta_x^d}(A) = W \text{ für alle } d \in D.$$

Zu zeigen ist

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A)) = W$$

Nach dem Substitutionslemma ist das gleichbedeutend mit

$$val_{\mathcal{D},\beta'}(A) = W$$

wobei

$$\beta'(y) = val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(y)) = \begin{cases} \beta(y) & \text{falls } x \neq y \\ val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x)) & \text{falls } y = x \end{cases}$$

Also  $\beta' = \beta_x^d$  für  $d = val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x))$ .

Die zweite Aussage läßt sich analog beweisen.

Den Modell und Folgerungsbegriff definieren wir nur für Formeln und Formelmengen ohne freie Variablen  
Das ist mit Abstand der häufigste Anwendungsfall  
Der Fall mit freien Variablen wird ausführlich in den Übungsaufgaben im Skript behandelt

## Definition

- Eine Interpretation  $\mathcal{D}$  über  $\Sigma$  nennen wir ein **Modell** einer Formel  $A$  ohne freie Variablen über  $\Sigma$ , wenn  $val_{\mathcal{D}}(A) = W$ .
- $\mathcal{D}$  heißt **Modell** einer Formelmenge  $M$  ohne freie Variablen, wenn für jede Formel  $B \in M$  gilt  $val_{\mathcal{D}}(B) = W$ .

## Definition

Es sei  $M \subseteq For_{\Sigma}$ ,  $A \in For_{\Sigma}$ , beide ohne freie Variablen.

$$M \models_{\Sigma} A \quad :\Leftrightarrow$$

Jedes Modell von  $M$  ist auch Modell von  $A$ .

Lies: **Aus  $M$  folgt  $A$**  (über  $\Sigma$ ).

Kurznotationen:

$$\models \text{ statt } \models_{\Sigma}, \quad \models A \text{ für } \emptyset \models A, \quad B \models A \text{ für } \{B\} \models A.$$

$M \models A$  gdw  $M \cup \{\neg A\}$   
hat kein Modell

## Definition

$A \in For_{\Sigma}$  heißt

- **allgemeingültig** gdw  $\models A$
- **erfüllbar** gdw  $\neg A$  ist nicht allgemeingültig.

## Theorem

- ① *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
  - ① *A allgemeingültig*
  - ② *Jede Interpretation  $\mathcal{D}$  ist Modell von A.*
  - ③  *$val_{\mathcal{D}}(A) = W$  für alle  $\mathcal{D}$ .*
- ② *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
  - ① *A erfüllbar*
  - ② *Es gibt  $\mathcal{D}$  mit  $val_{\mathcal{D}}(A) = W$*

# Beispiele für allgemeingültige Formeln

- 1  $\neg\forall xA \leftrightarrow \exists x\neg A$ ,
- 2  $\neg\exists xA \leftrightarrow \forall x\neg A$
- 3  $\forall x\forall yA \leftrightarrow \forall y\forall xA$ ,
- 4  $\exists x\exists yA \leftrightarrow \exists y\exists xA$
- 5  $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow \forall xA \wedge \forall xB$
- 6  $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists xA \vee \exists xB$
- 7  $\forall \vec{y}(A \wedge QxB \leftrightarrow Qx(A \wedge B))$ ,  
falls  $x \notin \text{Frei}(A)$  und  $\vec{y}$  alle freie Variablen in  $A \wedge QxB$  sind.
- 8  $\forall \vec{y}(QxA \wedge B \leftrightarrow Qx(A \wedge B))$ ,  
falls  $x \notin \text{Frei}(B)$  und  $\vec{y}$  alle freie Variablen in  $A \wedge QxB$  sind.
- 9  $\forall \vec{y}(A \vee QxB \leftrightarrow Qx(A \vee B))$ ,  
falls  $x \notin \text{Frei}(A)$  und  $\vec{y}$  alle freie Variablen in  $A \wedge QxB$  sind.
- 10  $\forall \vec{y}(QxA \vee B \leftrightarrow Qx(A \vee B))$ ,  
falls  $x \notin \text{Frei}(B)$  und  $\vec{y}$  alle freie Variablen in  $A \wedge QxB$  sind.



# Beweisbeispiel

Voraussetzung:  $x \notin \text{Frei}(A)$

Für alle  $\mathcal{D}, \beta$  ist zu zeigen:

$$\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(A \rightarrow \forall x B) = \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\forall x(A \rightarrow B))$$

Falls  $\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(A \rightarrow \forall x B) = W$ , dann folgt unmittelbar aus der Definition von  $\text{val}$   $\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\forall x(A \rightarrow B)) = W$  (Übung).

Sei jetzt  $\text{val}_{\mathcal{D}, I, \beta}(\forall x(A \rightarrow B)) = W$ , d. h. für alle  $d \in D$ :

$$(\text{val}_{\mathcal{D}, \beta_x^d}(A) = W \Rightarrow \text{val}_{\mathcal{D}, I, \beta_x^d}(B) = W). \quad (*)$$

Angenommen, es wäre  $\text{val}_{\mathcal{D}, I, \beta}(A \rightarrow \forall x B) = F$ . Dann gilt also

$$\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(A) = W \quad \text{und} \quad \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\forall x B) = F$$

es gibt also ein  $e \in D$  mit  $\text{val}_{\mathcal{D}, \beta_x^e}(B) = F$ .

Wegen  $x \notin \text{Frei}(A)$  gilt auch  $\text{val}_{\mathcal{D}, \beta_x^e}(A) = W$ . Aus (\*) folgt somit der Widerspruch

$$\text{val}_{\mathcal{D}, \beta_x^e}(B) = W$$

# Beispiel für ein Ableitbarkeitsproblem

$$\begin{aligned} & \forall x \forall y \forall z (r(x, y) \wedge r(y, z) \rightarrow r(x, z)) \\ & \forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow r(y, x)) \\ & \forall x \exists y (r(x, y)) \end{aligned} \quad \models \quad \forall x r(x, x)$$

Transitivität

Symmetrie

Endlosigkeit

$\models$

Reflexivität

Die Antwort ist

**JA**

## 2. Beispiel für ein Ableitbarkeitsproblem

$$\neg \exists x (a < x \wedge c(x) \wedge \forall y (a \leq y < x \rightarrow b(y)))$$

$\models$

$$\exists x (a < x \wedge \neg c(x) \wedge \forall y (a \leq y < x \rightarrow \neg b(y)))$$

Gegenbeispiel:

|             |     |               |     |               |
|-------------|-----|---------------|-----|---------------|
| $a$         |     | $p_1$         |     | $p_2$         |
| $\cdot$     | $<$ | $\cdot$       | $<$ | $\cdot$       |
| $b(a)$      |     | $\neg b(p_1)$ |     | $\neg b(p_2)$ |
| $\neg c(a)$ |     | $\neg c(p_1)$ |     | $c(p_2)$      |