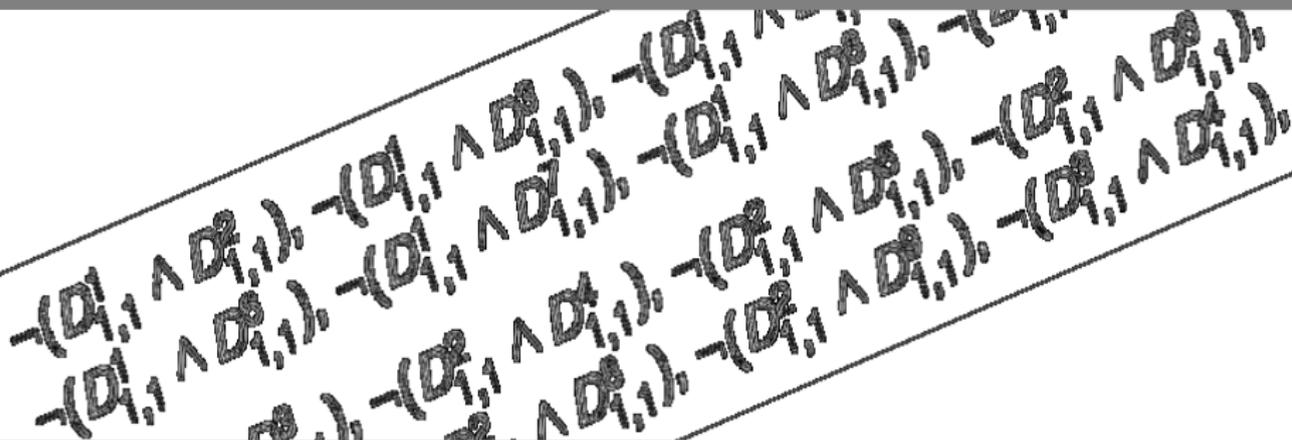


# Formale Systeme

## Prädikatenlogik: Tableauekalkül (ohne Gleichheit)

Prof. Dr. Bernhard Beckert | WS 2009/2010

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Typ  $\alpha$ :

$F$	$F_1$	$F_2$
$1\neg A$	$0A$	$-$
$0\neg A$	$1A$	$-$
$1A \wedge B$	$1A$	$1B$
$0A \vee B$	$0A$	$0B$
$0A \rightarrow B$	$1A$	$0B$

Typ  $\beta$

$F$	$F_1$	$F_2$
$0A \wedge B$	$0A$	$0B$
$1A \vee B$	$1A$	$1B$
$1A \rightarrow B$	$0A$	$1B$

Typ  $\gamma$ :

$F$	$F_1$
$1\forall xA(x)$	$1A(x)$
$0\exists xA(x)$	$0A(x)$

Typ  $\delta$ :

$F$	$F_1$
$1\exists xA(x)$	$1A(x)$
$0\forall xA(x)$	$0A(x)$

Typ  $\alpha$ :

$F$	$F_1$	$F_2$
$1\neg A$	$0A$	$-$
$0\neg A$	$1A$	$-$
$1A \wedge B$	$1A$	$1B$
$0A \vee B$	$0A$	$0B$
$0A \rightarrow B$	$1A$	$0B$

Typ  $\beta$

$F$	$F_1$	$F_2$
$0A \wedge B$	$0A$	$0B$
$1A \vee B$	$1A$	$1B$
$1A \rightarrow B$	$0A$	$1B$

Typ  $\gamma$ :

$F$	$F_1$
$1\forall xA(x)$	$1A(x)$
$0\exists xA(x)$	$0A(x)$

Typ  $\delta$ :

$F$	$F_1$
$1\exists xA(x)$	$1A(x)$
$0\forall xA(x)$	$0A(x)$

# Zusammenfassung der Tableauregeln

$\alpha$ -Regel  $\frac{F}{\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \end{array}}$  für  $\alpha$ -Formeln  $F$

$\beta$ -Regel  $\frac{F}{F_1 | F_2}$  für  $\beta$ -Formeln  $F$

$\gamma$ -Regel  $\frac{F}{F_1(y)}$  für  $\gamma$ -Formeln  $F$  und eine neue Variable  $y$

$\delta$ -Regel  $\frac{F}{F_1(f(x_1, \dots, x_n))}$  für  $\delta$ -Formeln  $F$ , wobei  $x_1, \dots, x_n$  alle freien Variablen in  $F$  sind und  $f$  ein neues  $n$ -stelliges Funktionssymbol

# Zusammenfassung der Tableauregeln

$\alpha$ -Regel  $\frac{F}{\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \end{array}}$  für  $\alpha$ -Formeln  $F$

$\beta$ -Regel  $\frac{F}{F_1 | F_2}$  für  $\beta$ -Formeln  $F$

$\gamma$ -Regel  $\frac{F}{F_1(y)}$  für  $\gamma$ -Formeln  $F$  und eine neue Variable  $y$

$\delta$ -Regel  $\frac{F}{F_1(f(x_1, \dots, x_n))}$  für  $\delta$ -Formeln  $F$ , wobei  $x_1, \dots, x_n$  alle freien Variablen in  $F$  sind und  $f$  ein neues  $n$ -stelliges Funktionssymbol

# Zusammenfassung der Tableauregeln

$\alpha$ -Regel  $\frac{F}{\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \end{array}}$  für  $\alpha$ -Formeln  $F$

$\beta$ -Regel  $\frac{F}{F_1 | F_2}$  für  $\beta$ -Formeln  $F$

$\gamma$ -Regel  $\frac{F}{F_1(y)}$  für  $\gamma$ -Formeln  $F$  und eine neue Variable  $y$

$\delta$ -Regel  $\frac{F}{F_1(f(x_1, \dots, x_n))}$  für  $\delta$ -Formeln  $F$ , wobei  $x_1, \dots, x_n$  alle freien Variablen in  $F$  sind und  $f$  ein neues  $n$ -stelliges Funktionssymbol

# Zusammenfassung der Tableauregeln

Anfangsregel  $\frac{}{0A}$  für die zu beweisende Formel  $A$   
 $A$  ohne freie Variable

V-Regel  $\frac{}{1B}$  für jedes  $B \in M$ ,  
 $B$  ohne freie Variablen

# Zusammenfassung der Tableauregeln

Anfangsregel  $\frac{}{0A}$  für die zu beweisende Formel  $A$   
 $A$  ohne freie Variable

V-Regel  $\frac{}{1B}$  für jedes  $B \in M$ ,  
 $B$  ohne freie Variablen

Sei  $T$  ein Tableau,  $\pi$  ein Pfad in  $T$  und  $\sigma$  eine Substitution.

## Definition

$\sigma$  *schließt*  $\pi$ , wenn es

- Formeln  $B, C$  gibt, so daß  $\sigma(B) = \sigma(C)$ ,  $\sigma$  kollisionsfrei für  $B$  und  $C$  ist und  $1B, 0C$  auf  $\pi$  liegen oder
- eine der Formeln  $01$  oder  $10$  liegt auf  $\pi$ .

$\sigma$  *schließt* ein Tableau  $T$ , wenn  $\sigma$  alle seine Pfade schließt.

Sei  $T$  ein Tableau,  $\pi$  ein Pfad in  $T$  und  $\sigma$  eine Substitution.

## Definition

$\sigma$  *schließt*  $\pi$ , wenn es

- Formeln  $B, C$  gibt, so daß  $\sigma(B) = \sigma(C)$ ,  $\sigma$  kollisionsfrei für  $B$  und  $C$  ist und  $1B, 0C$  auf  $\pi$  liegen oder
- eine der Formeln  $01$  oder  $10$  liegt auf  $\pi$ .

$\sigma$  *schließt* ein Tableau  $T$ , wenn  $\sigma$  alle seine Pfade schließt.

Sei  $T$  ein Tableau,  $\pi$  ein Pfad in  $T$  und  $\sigma$  eine Substitution.

## Definition

$\sigma$  *schließt*  $\pi$ , wenn es

- Formeln  $B, C$  gibt, so daß  $\sigma(B) = \sigma(C)$ ,  $\sigma$  kollisionsfrei für  $B$  und  $C$  ist und  $1B, 0C$  auf  $\pi$  liegen oder
- eine der Formeln  $01$  oder  $10$  liegt auf  $\pi$ .

$\sigma$  *schließt* ein Tableau  $T$ , wenn  $\sigma$  alle seine Pfade schließt .

Die Abschlußregel oder C-Regel:

Aus einem Tableau  $T$  erzeuge ein Tableau  $T_1$   
durch Wahl eines Pfades  $\pi$  und einer Substitution  $\sigma$ , die  $\pi$   
schließt, und

Anwendung von  $\sigma$  auf das ganze Tableau  $T$ .

# Ein einfaches Beispiel

0	$\forall x p(x) \rightarrow \exists y p(y)$	(Start)
1	$\forall x p(x)$	( $\alpha$ -Regel)
0	$\exists y p(y)$	( $\alpha$ -Regel)
1	$p(X)$	( $\gamma$ -Regel)
0	$p(Y)$	( $\gamma$ -Regel)

Aus der zu beweisenden Aussage entsteht durch Anwendung der  $\alpha$ - und  $\gamma$ -Regel das linke Tableau.

# Ein einfaches Beispiel

$$\begin{array}{l} 0 \forall x p(x) \rightarrow \exists y p(y) \quad (\text{Start}) \\ | \\ 1 \forall x p(x) \quad (\alpha\text{-Regel}) \\ | \\ 0 \exists y p(y) \quad (\alpha\text{-Regel}) \\ | \\ 1 p(X) \quad (\gamma\text{-Regel}) \\ | \\ 0 p(Y) \quad (\gamma\text{-Regel}) \end{array}$$

C-Regel  
 $\implies$   
 $\{Y/X\}$

$$\begin{array}{l} 0 \forall x p(x) \rightarrow \exists y p(y) \\ | \\ 1 \forall x p(x) \\ | \\ 0 \exists y p(y) \\ | \\ 1 p(X) \\ | \\ 0 p(X) \end{array}$$

Aus der zu beweisenden Aussage entsteht durch Anwendung der  $\alpha$ - und  $\gamma$ -Regel das linke Tableau, daraus dann das rechts stehende durch Anwendung der C-Regel.

# Ein geschlossenes Tableau

$$1[] \quad 0 \exists y \forall x p(x, y) \rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$$

$$2[1] \quad 1 \exists y \forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 0 \forall x \exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 1 \forall x p(x, a)$$

$$5[3] \quad 0 \exists y p(b, y)$$

$$6[4] \quad 1 p(X, a)$$

$$7[5] \quad 0 p(b, Y)$$

geschlossen mit  $\sigma(X) = b$  und  $\sigma(Y) = a$

# Ein geschlossenes Tableau

$$1[] \quad 0 \exists y \forall x p(x, y) \rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$$

$$2[1] \quad 1 \exists y \forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 0 \forall x \exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 1 \forall x p(x, a)$$

$$5[3] \quad 0 \exists y p(b, y)$$

$$6[4] \quad 1 p(X, a)$$

$$7[5] \quad 0 p(b, Y)$$

geschlossen mit  $\sigma(X) = b$  und  $\sigma(Y) = a$

# Ein geschlossenes Tableau

$$1[] \quad 0 \exists y \forall x p(x, y) \rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$$

$$2[1] \quad 1 \exists y \forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 0 \forall x \exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 1 \forall x p(x, a)$$

$$5[3] \quad 0 \exists y p(b, y)$$

$$6[4] \quad 1 p(X, a)$$

$$7[5] \quad 0 p(b, Y)$$

geschlossen mit  $\sigma(X) = b$  und  $\sigma(Y) = a$

# Ein geschlossenes Tableau

$$1[] \quad 0 \exists y \forall x p(x, y) \rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$$

$$2[1] \quad 1 \exists y \forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 0 \forall x \exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 1 \forall x p(x, a)$$

$$5[3] \quad 0 \exists y p(b, y)$$

$$6[4] \quad 1 p(X, a)$$

$$7[5] \quad 0 p(b, Y)$$

geschlossen mit  $\sigma(X) = b$  und  $\sigma(Y) = a$

# Ein geschlossenes Tableau

$$1[] \quad 0 \exists y \forall x p(x, y) \rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$$

$$2[1] \quad 1 \exists y \forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 0 \forall x \exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 1 \forall x p(x, a)$$

$$5[3] \quad 0 \exists y p(b, y)$$

$$6[4] \quad 1 p(X, a)$$

$$7[5] \quad 0 p(b, Y)$$

geschlossen mit  $\sigma(X) = b$  und  $\sigma(Y) = a$

# Ein geschlossenes Tableau

$$1[] \quad 0 \exists y \forall x p(x, y) \rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$$

$$2[1] \quad 1 \exists y \forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 0 \forall x \exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 1 \forall x p(x, a)$$

$$5[3] \quad 0 \exists y p(b, y)$$

$$6[4] \quad 1 p(X, a)$$

$$7[5] \quad 0 p(b, Y)$$

geschlossen mit  $\sigma(X) = b$  und  $\sigma(Y) = a$

# Ein geschlossenes Tableau

$$1[] \quad 0 \exists y \forall x p(x, y) \rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$$

$$2[1] \quad 1 \exists y \forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 0 \forall x \exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 1 \forall x p(x, a)$$

$$5[3] \quad 0 \exists y p(b, y)$$

$$6[4] \quad 1 p(X, a)$$

$$7[5] \quad 0 p(b, Y)$$

geschlossen mit  $\sigma(X) = b$  und  $\sigma(Y) = a$

$$1[] \quad 0\forall x\exists y p(x, y) \rightarrow \exists y\forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0\exists y\forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1\forall x\exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0\forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1\exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1p(X, g(X))$$

$p(f(Y), Y)$  und  $p(X, g(X))$  sind nicht unifizierbar  
es müßte gelten

$$\sigma(X) = \sigma(f(Y)) \text{ und } \sigma(Y) = \sigma(g(X))$$

$$\text{also } \sigma(X) = f(g(\sigma(X)))$$

$$1[] \quad 0\forall x\exists y p(x, y) \rightarrow \exists y\forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0\exists y\forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1\forall x\exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0\forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1\exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1p(X, g(X))$$

$p(f(Y), Y)$  und  $p(X, g(X))$  sind nicht unifizierbar  
es müßte gelten

$$\sigma(X) = \sigma(f(Y)) \text{ und } \sigma(Y) = \sigma(g(X))$$

$$\text{also } \sigma(X) = f(g(\sigma(X)))$$

$$1[] \quad 0 \forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0 \exists y \forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1 \forall x \exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0 \forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1 \exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0 p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1 p(X, g(X))$$

$p(f(Y), Y)$  und  $p(X, g(X))$  sind nicht unifizierbar  
es müßte gelten

$$\sigma(X) = \sigma(f(Y)) \text{ und } \sigma(Y) = \sigma(g(X))$$

$$\text{also } \sigma(X) = f(g(\sigma(X)))$$

$$1[] \quad 0\forall x\exists y p(x, y) \rightarrow \exists y\forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0\exists y\forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1\forall x\exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0\forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1\exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1p(X, g(X))$$

$p(f(Y), Y)$  und  $p(X, g(X))$  sind nicht unifizierbar  
es müßte gelten

$$\sigma(X) = \sigma(f(Y)) \text{ und } \sigma(Y) = \sigma(g(X))$$

$$\text{also } \sigma(X) = f(g(\sigma(X)))$$

$$1[] \quad 0\forall x\exists y p(x, y) \rightarrow \exists y\forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0\exists y\forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1\forall x\exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0\forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1\exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1p(X, g(X))$$

$p(f(Y), Y)$  und  $p(X, g(X))$  sind nicht unifizierbar  
es müßte gelten

$$\sigma(X) = \sigma(f(Y)) \text{ und } \sigma(Y) = \sigma(g(X))$$

$$\text{also } \sigma(X) = f(g(\sigma(X)))$$

$$1[] \quad 0\forall x\exists y p(x, y) \rightarrow \exists y\forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0\exists y\forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1\forall x\exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0\forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1\exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1p(X, g(X))$$

$p(f(Y), Y)$  und  $p(X, g(X))$  sind nicht unifizierbar  
es müßte gelten

$$\sigma(X) = \sigma(f(Y)) \text{ und } \sigma(Y) = \sigma(g(X))$$

$$\text{also } \sigma(X) = f(g(\sigma(X)))$$

$$1[] \quad 0\forall x\exists y p(x, y) \rightarrow \exists y\forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0\exists y\forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1\forall x\exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0\forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1\exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1p(X, g(X))$$

$p(f(Y), Y)$  und  $p(X, g(X))$  sind nicht unifizierbar  
es müßte gelten

$$\sigma(X) = \sigma(f(Y)) \text{ und } \sigma(Y) = \sigma(g(X))$$

$$\text{also } \sigma(X) = f(g(\sigma(X)))$$

$$1[] \quad 0\forall x\exists y p(x, y) \rightarrow \exists y\forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0\exists y\forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1\forall x\exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0\forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1\exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1p(X, g(X))$$

$p(f(Y), Y)$  und  $p(X, g(X))$  sind nicht unifizierbar  
es müßte gelten

$$\sigma(X) = \sigma(f(Y)) \text{ und } \sigma(Y) = \sigma(g(X))$$

$$\text{also } \sigma(X) = f(g(\sigma(X)))$$

$$1[] \quad 0\forall x\exists y p(x, y) \rightarrow \exists y\forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0\exists y\forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1\forall x\exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0\forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1\exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1p(X, g(X))$$

$p(f(Y), Y)$  und  $p(X, g(X))$  sind nicht unifizierbar  
es müßte gelten

$$\sigma(X) = \sigma(f(Y)) \text{ und } \sigma(Y) = \sigma(g(X))$$

$$\text{also } \sigma(X) = f(g(\sigma(X)))$$

# Mehrfache Anwendung der $\gamma$ -Regel

Beweisaufgabe:  $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$

Tableaubeweis:

$$1[] \quad 1p(0)$$

$$2[] \quad 1\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x)))$$

$$3[] \quad 0p(s(s(0)))$$

$$4[2] \quad 1p(X) \rightarrow p(s(X))$$

$$5[4] \quad 0p(X)$$

$$\sigma_1(X) = 0$$

$$5a \quad 0p(0)$$

$$6[4] \quad 1p(s(X))$$

$$6a \quad 1p(s(0))$$

$$7[2] \quad 1p(Y) \rightarrow p(s(Y))$$

$$9[7] \quad 1p(s(Y))$$

$$8[7] \quad 0p(Y)$$

$$\sigma_2(Y) = s(0)$$

$$8a \quad 0p(s(0))$$

$$9a \quad 1p(s(s(0)))$$

# Mehrfache Anwendung der $\gamma$ -Regel

Beweisaufgabe:  $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$

Tableaubeweis:

$$1[] \quad 1p(0)$$

$$2[] \quad 1\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x)))$$

$$3[] \quad 0p(s(s(0)))$$

$$4[2] \quad 1p(X) \rightarrow p(s(X))$$

$$5[4] \quad 0p(X) \\ \sigma_1(X) = 0$$

$$5a \quad 0p(0)$$

$$6[4] \quad 1p(s(X))$$

$$6a \quad 1p(s(0))$$

$$7[2] \quad 1p(Y) \rightarrow p(s(Y))$$

$$9[7] \quad 1p(s(Y))$$

$$8[7] \quad 0p(Y) \\ \sigma_2(Y) = s(0)$$

$$8a \quad 0p(s(0))$$

$$9a \quad 1p(s(s(0)))$$

# Mehrfache Anwendung der $\gamma$ -Regel

Beweisaufgabe:  $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$

Tableaubeweis:

$$1[] \quad 1p(0)$$

$$2[] \quad 1\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x)))$$

$$3[] \quad 0p(s(s(0)))$$

$$4[2] \quad 1p(X) \rightarrow p(s(X))$$

$$5[4] \quad 0p(X) \\ \sigma_1(X) = 0$$

$$5a \quad 0p(0)$$

$$6[4] \quad 1p(s(X))$$

$$6a \quad 1p(s(0))$$

$$7[2] \quad 1p(Y) \rightarrow p(s(Y))$$

$$9[7] \quad 1p(s(Y))$$

$$8[7] \quad 0p(Y) \\ \sigma_2(Y) = s(0)$$

$$8a \quad 0p(s(0))$$

$$9a \quad 1p(s(s(0)))$$

# Mehrfache Anwendung der $\gamma$ -Regel

Beweisaufgabe:  $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$

Tableaubeweis:

$$1[] \quad 1p(0)$$

$$2[] \quad 1\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x)))$$

$$3[] \quad 0p(s(s(0)))$$

$$4[2] \quad 1p(X) \rightarrow p(s(X))$$

$$5[4] \quad 0p(X)$$

$$\sigma_1(X) = 0$$

$$5a \quad 0p(0)$$

$$6[4] \quad 1p(s(X))$$

$$6a \quad 1p(s(0))$$

$$7[2] \quad 1p(Y) \rightarrow p(s(Y))$$

$$9[7] \quad 1p(s(Y))$$

$$8[7] \quad 0p(Y)$$

$$\sigma_2(Y) = s(0)$$

$$8a \quad 0p(s(0))$$

$$9a \quad 1p(s(s(0)))$$

# Mehrfache Anwendung der $\gamma$ -Regel

Beweisaufgabe:  $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$

Tableaubeweis:

$$1[] \quad 1p(0)$$

$$2[] \quad 1\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x)))$$

$$3[] \quad 0p(s(s(0)))$$

$$4[2] \quad 1p(X) \rightarrow p(s(X))$$

$$5[4] \quad 0p(X)$$

$$\sigma_1(X) = 0$$

$$5a \quad 0p(0)$$

$$6[4] \quad 1p(s(X))$$

$$6a \quad 1p(s(0))$$

$$7[2] \quad 1p(Y) \rightarrow p(s(Y))$$

$$9[7] \quad 1p(s(Y))$$

$$8[7] \quad 0p(Y)$$

$$\sigma_2(Y) = s(0)$$

$$8a \quad 0p(s(0))$$

$$9a \quad 1p(s(s(0)))$$

# Mehrfache Anwendung der $\gamma$ -Regel

Beweisaufgabe:  $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$

Tableaubeweis:

$$1[] \quad 1p(0)$$

$$2[] \quad 1\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x)))$$

$$3[] \quad 0p(s(s(0)))$$

$$4[2] \quad 1p(X) \rightarrow p(s(X))$$

$$5[4] \quad 0p(X)$$

$$\sigma_1(X) = 0$$

$$5a \quad 0p(0)$$

$$6[4] \quad 1p(s(X))$$

$$6a \quad 1p(s(0))$$

$$7[2] \quad 1p(Y) \rightarrow p(s(Y))$$

$$9[7] \quad 1p(s(Y))$$

$$8[7] \quad 0p(Y)$$

$$\sigma_2(Y) = s(0)$$

$$8a \quad 0p(s(0))$$

$$9a \quad 1p(s(s(0)))$$

# Mehrfache Anwendung der $\gamma$ -Regel

Beweisaufgabe:  $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$

Tableaubeweis:

$$1[] \quad 1p(0)$$

$$2[] \quad 1\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x)))$$

$$3[] \quad 0p(s(s(0)))$$

$$4[2] \quad 1p(X) \rightarrow p(s(X))$$

$$5[4] \quad 0p(X)$$

$$\sigma_1(X) = 0$$

$$5a \quad 0p(0)$$

$$6[4] \quad 1p(s(X))$$

$$6a \quad 1p(s(0))$$

$$7[2] \quad 1p(Y) \rightarrow p(s(Y))$$

$$9[7] \quad 1p(s(Y))$$

$$8[7] \quad 0p(Y)$$

$$\sigma_2(Y) = s(0)$$

$$8a \quad 0p(s(0))$$

$$9a \quad 1p(s(s(0)))$$

# Mehrfache Anwendung der $\gamma$ -Regel

Beweisaufgabe:  $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$

Tableaubeweis:

$$1[] \quad 1p(0)$$

$$2[] \quad 1\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x)))$$

$$3[] \quad 0p(s(s(0)))$$

$$4[2] \quad 1p(X) \rightarrow p(s(X))$$

$$5[4] \quad 0p(X) \\ \sigma_1(X) = 0$$

$$5a \quad 0p(0)$$

$$6[4] \quad 1p(s(X))$$

$$6a \quad 1p(s(0))$$

$$7[2] \quad 1p(Y) \rightarrow p(s(Y))$$

$$9[7] \quad 1p(s(Y))$$

$$8[7] \quad 0p(Y) \\ \sigma_2(Y) = s(0)$$

$$8a \quad 0p(s(0))$$

$$9a \quad 1p(s(s(0)))$$

# Mehrfache Anwendung der $\gamma$ -Regel

Beweisaufgabe:  $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$

Tableaubeweis:

$$1[] \quad 1p(0)$$

$$2[] \quad 1\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x)))$$

$$3[] \quad 0p(s(s(0)))$$

$$4[2] \quad 1p(X) \rightarrow p(s(X))$$

$$5[4] \quad 0p(X)$$

$$\sigma_1(X) = 0$$

$$5a \quad 0p(0)$$

$$6[4] \quad 1p(s(X))$$

$$6a \quad 1p(s(0))$$

$$7[2] \quad 1p(Y) \rightarrow p(s(Y))$$

$$9[7] \quad 1p(s(Y))$$

$$8[7] \quad 0p(Y)$$

$$\sigma_2(Y) = s(0)$$

$$8a \quad 0p(s(0))$$

$$9a \quad 1p(s(s(0)))$$

# Korrektheit und Vollständigkeit

## Definition

Es seien  $A \in For_{\Sigma}$ ,  $M \subseteq For_{\Sigma}$ ,  
 $T$  ein Tableau für  $A$  über  $M$  und  
 $\mathcal{D}$  eine Interpretation über  $\bar{\Sigma}$ ,  
wobei  $\bar{\Sigma} = \Sigma \cup \{f \mid f \text{ neues Funktionssymbol in } T\}$ .  
 $\mathcal{D}$  heißt **Modell von  $T$  über  $M$**  gdw. gilt

- $\mathcal{D}$  ist Modell von  $M$
- zu jeder Variablenbelegung  $\beta$  gibt es einen Pfad  $\pi$  in  $T$  mit  $val_{\mathcal{D},\beta}(F) = W$  für alle  $F$  auf  $\pi$ .

## Definition

Es seien  $A \in For_{\Sigma}$ ,  $M \subseteq For_{\Sigma}$ ,  
 $T$  ein Tableau für  $A$  über  $M$  und  
 $\mathcal{D}$  eine Interpretation über  $\bar{\Sigma}$ ,  
wobei  $\bar{\Sigma} = \Sigma \cup \{f \mid f \text{ neues Funktionssymbol in } T\}$ .  
 $\mathcal{D}$  heißt **Modell von  $T$  über  $M$**  gdw. gilt

- $\mathcal{D}$  ist Modell von  $M$
- zu jeder Variablenbelegung  $\beta$  gibt es einen Pfad  $\pi$  in  $T$  mit  $val_{\mathcal{D},\beta}(F) = W$  für alle  $F$  auf  $\pi$ .

## Theorem

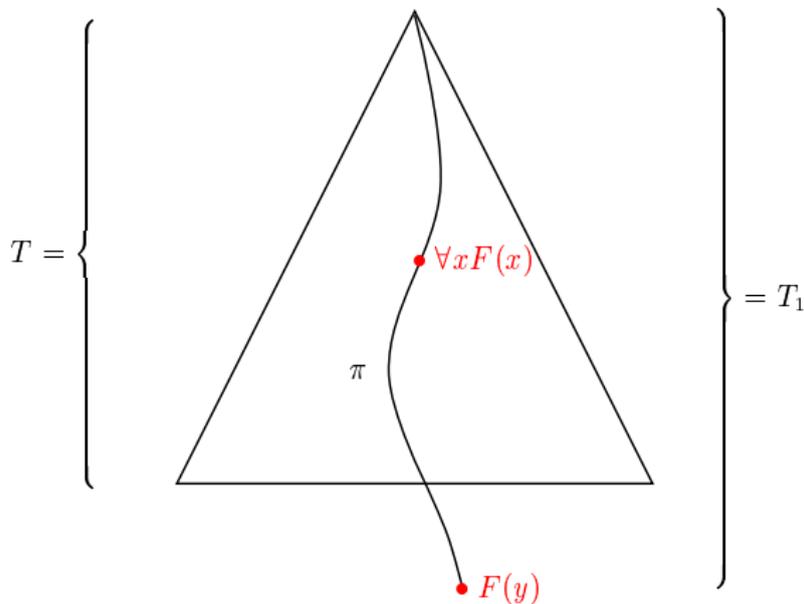
*$M$  sei eine Formelmenge.*

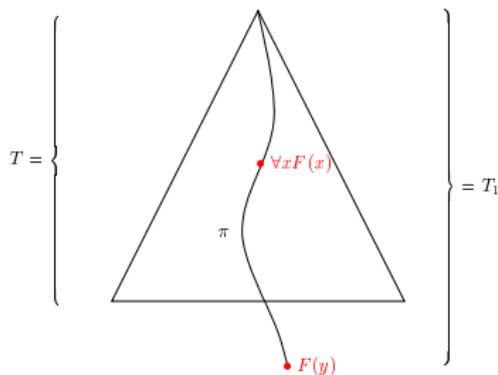
*Das Tableau  $T'$  über  $M$  gehe aus  $T$  über  $M$  durch Anwendung einer Tableauregel hervor.*

*Hat  $T$  ein Modell über  $M$ , dann auch  $T'$ .*

# Beweis des Korrektheitslemma,

## $\gamma$ -Fall

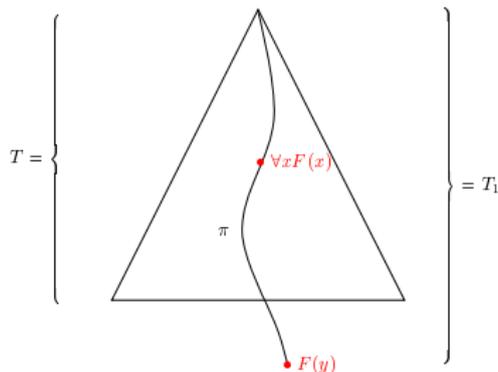




$\mathcal{D}$  sei ein Modell von  $T$  über  $M$ . Wir zeigen, daß  $\mathcal{D}$  auch Modell von  $T_1$  ist.

Sei  $\beta$  eine Belegung und  $\pi_0$  ein Pfad in  $T$  mit  $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$ .

Wenn  $\pi_0 \neq \pi$ , ist  $\pi_0$  unverändert ein Pfad in  $T_1$ , fertig.

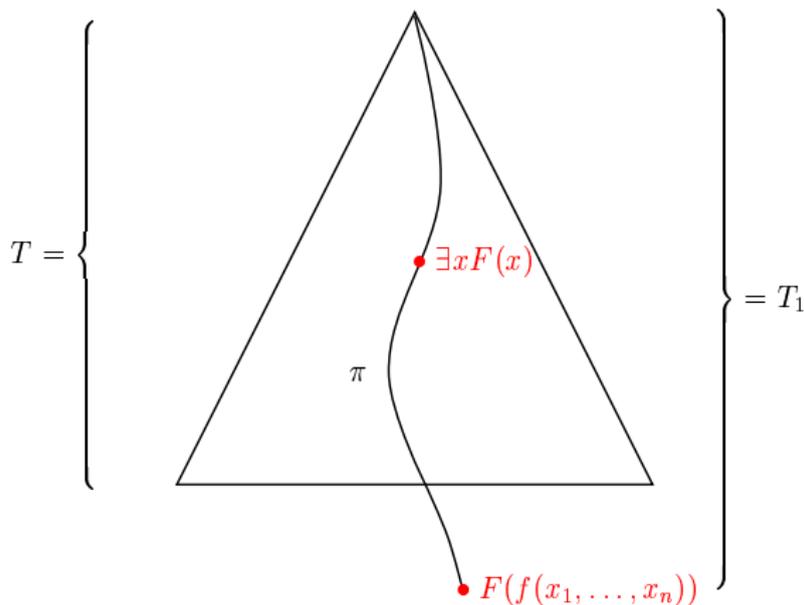


$\mathcal{D}$  sei ein Modell von  $T$  über  $M$ . Wir zeigen, daß  $\mathcal{D}$  auch Modell von  $T_1$  ist.

Sei  $\beta$  eine Belegung und  $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi$ , i.e.  $\pi_0 = \pi$ .

Aus  $(\mathcal{D}, \beta) \models \forall x F$  folgt insbesondere  $(\mathcal{D}, \beta) \models F(y)$ , also  $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi \cup \{F(y)\}$ .

# Beweis des Korrektheitslemma, $\delta$ -Fall



# Beweis des Korrektheitslemma, $\delta$ -Fall

Nach Voraussetzung sei  $\mathcal{D}$  Modell von  $T$  über  $M$ .

Wir konstruieren eine Interpretation  $\mathcal{D}'$ , die sich von  $\mathcal{D}$  nur darin unterscheidet, daß dem Funktionszeichen  $f$  eine Interpretation  $f^{\mathcal{D}'}$  zugeordnet wird.

$$f^{\mathcal{D}'}(d_1, \dots, d_n) = d?$$

Für  $d_1, \dots, d_n \in D$  und  $\beta$  mit  $\beta(x_i) = d_i$  für  $i = 1, \dots, n$  gilt entweder

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$$

in diesem Fall gibt es ein  $d \in D$  mit

$$(\mathcal{D}, \beta_x^d) \models F(x)$$

oder  $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$  gilt nicht. Im letzten Fall wählen wir einen beliebigen Wert  $d \in D$ .

# Beweis des Korrektheitslemma, $\delta$ -Fall

Nach Voraussetzung sei  $\mathcal{D}$  Modell von  $T$  über  $M$ .

Wir konstruieren eine Interpretation  $\mathcal{D}'$ , die sich von  $\mathcal{D}$  nur darin unterscheidet, daß dem Funktionszeichen  $f$  eine Interpretation  $f^{\mathcal{D}'}$  zugeordnet wird.

$$f^{\mathcal{D}'}(d_1, \dots, d_n) = d?$$

Für  $d_1, \dots, d_n \in D$  und  $\beta$  mit  $\beta(x_i) = d_i$  für  $i = 1, \dots, n$  gilt entweder

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$$

in diesem Fall gibt es ein  $d \in D$  mit

$$(\mathcal{D}, \beta_x^d) \models F(x)$$

oder  $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$  gilt nicht. Im letzten Fall wählen wir einen beliebigen Wert  $d \in D$ .

# Beweis des Korrektheitslemma, $\delta$ -Fall

Nach Voraussetzung sei  $\mathcal{D}$  Modell von  $T$  über  $M$ .

Wir konstruieren eine Interpretation  $\mathcal{D}'$ , die sich von  $\mathcal{D}$  nur darin unterscheidet, daß dem Funktionszeichen  $f$  eine Interpretation  $f^{\mathcal{D}'}$  zugeordnet wird.

$$f^{\mathcal{D}'}(d_1, \dots, d_n) = d?$$

Für  $d_1, \dots, d_n \in D$  und  $\beta$  mit  $\beta(x_i) = d_i$  für  $i = 1, \dots, n$  gilt entweder

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$$

in diesem Fall gibt es ein  $d \in D$  mit

$$(\mathcal{D}, \beta_x^d) \models F(x)$$

oder  $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$  gilt nicht. Im letzten Fall wählen wir einen beliebigen Wert  $d \in D$ .

# Beweis des Korrektheitslemma, $\delta$ -Fall

Nach Voraussetzung sei  $\mathcal{D}$  Modell von  $T$  über  $M$ .

Wir konstruieren eine Interpretation  $\mathcal{D}'$ , die sich von  $\mathcal{D}$  nur darin unterscheidet, daß dem Funktionszeichen  $f$  eine Interpretation  $f^{\mathcal{D}'}$  zugeordnet wird.

$$f^{\mathcal{D}'}(d_1, \dots, d_n) = d?$$

Für  $d_1, \dots, d_n \in D$  und  $\beta$  mit  $\beta(x_i) = d_i$  für  $i = 1, \dots, n$  gilt entweder

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$$

in diesem Fall gibt es ein  $d \in D$  mit

$$(\mathcal{D}, \beta_x^d) \models F(x)$$

oder  $(\mathcal{D}, \beta) \not\models \exists x F$  gilt nicht. Im letzten Fall wählen wir einen beliebigen Wert  $d \in D$ .

# Beweis des Korrektheitslemma, $\delta$ -Fall

Wir wollen zeigen, daß  $\mathcal{D}'$  Modell von  $T'$  ist.

Es sei  $\beta$  eine beliebige Belegung bzgl.  $\mathcal{D}'$ ,  $\beta$  ist auch Belegung bzgl.  $\mathcal{D}$ , da sich der Grundbereich nicht geändert hat.

Es gibt  $\pi_0$  in  $T$  mit  $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$ .

Nur der Fall  $\pi_0 = \pi$  ist interessant.

Aus  $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F(x_1, \dots, x_n)$  folgt nach Konstruktion von  $\mathcal{D}'$  auch

$$(\mathcal{D}', \beta) \models F(f(x_1, \dots, x_n))$$

.

Da in den restlichen Formeln des Pfades  $\pi$  und in  $M$  das Zeichen  $f$  nicht vorkommt, erhalten wir insgesamt

$$(\mathcal{D}', \beta) \models \pi \cup \{F(f(x_1, \dots, x_n))\} \text{ und } (\mathcal{D}', \beta) \models M.$$

# Beweis des Korrektheitslemma, $\delta$ -Fall

Wir wollen zeigen, daß  $\mathcal{D}'$  Modell von  $T'$  ist.

Es sei  $\beta$  eine beliebige Belegung bzgl.  $\mathcal{D}'$ ,  $\beta$  ist auch Belegung bzgl.  $\mathcal{D}$ , da sich der Grundbereich nicht geändert hat.

Es gibt  $\pi_0$  in  $T$  mit  $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$ .

Nur der Fall  $\pi_0 = \pi$  ist interessant.

Aus  $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F(x_1, \dots, x_n)$  folgt nach Konstruktion von  $\mathcal{D}'$  auch

$$(\mathcal{D}', \beta) \models F(f(x_1, \dots, x_n))$$

Da in den restlichen Formeln des Pfades  $\pi$  und in  $M$  das Zeichen  $f$  nicht vorkommt, erhalten wir insgesamt

$$(\mathcal{D}', \beta) \models \pi \cup \{F(f(x_1, \dots, x_n))\} \text{ und } (\mathcal{D}', \beta) \models M.$$

# Beweis des Korrektheitslemma, $\delta$ -Fall

Wir wollen zeigen, daß  $\mathcal{D}'$  Modell von  $T'$  ist.

Es sei  $\beta$  eine beliebige Belegung bzgl.  $\mathcal{D}'$ ,  $\beta$  ist auch Belegung bzgl.  $\mathcal{D}$ , da sich der Grundbereich nicht geändert hat.

Es gibt  $\pi_0$  in  $T$  mit  $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$ .

Nur der Fall  $\pi_0 = \pi$  ist interessant.

Aus  $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F(x_1, \dots, x_n)$  folgt nach Konstruktion von  $\mathcal{D}'$  auch

$$(\mathcal{D}', \beta) \models F(f(x_1, \dots, x_n))$$

.

Da in den restlichen Formeln des Pfades  $\pi$  und in  $M$  das Zeichen  $f$  nicht vorkommt, erhalten wir insgesamt

$$(\mathcal{D}', \beta) \models \pi \cup \{F(f(x_1, \dots, x_n))\} \text{ und } (\mathcal{D}', \beta) \models M.$$

# Beweis des Korrektheitslemma, $\delta$ -Fall

Wir wollen zeigen, daß  $\mathcal{D}'$  Modell von  $T'$  ist.

Es sei  $\beta$  eine beliebige Belegung bzgl.  $\mathcal{D}'$ ,  $\beta$  ist auch Belegung bzgl.  $\mathcal{D}$ , da sich der Grundbereich nicht geändert hat.

Es gibt  $\pi_0$  in  $T$  mit  $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$ .

Nur der Fall  $\pi_0 = \pi$  ist interessant.

Aus  $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F(x_1, \dots, x_n)$  folgt nach Konstruktion von  $\mathcal{D}'$  auch

$$(\mathcal{D}', \beta) \models F(f(x_1, \dots, x_n))$$

.

Da in den restlichen Formeln des Pfades  $\pi$  und in  $M$  das Zeichen  $f$  nicht vorkommt, erhalten wir insgesamt

$$(\mathcal{D}', \beta) \models \pi \cup \{F(f(x_1, \dots, x_n))\} \text{ und } (\mathcal{D}', \beta) \models M.$$

# Beweis des Korrektheitslemma, $\delta$ -Fall

Wir wollen zeigen, daß  $\mathcal{D}'$  Modell von  $T'$  ist.

Es sei  $\beta$  eine beliebige Belegung bzgl.  $\mathcal{D}'$ ,  $\beta$  ist auch Belegung bzgl.  $\mathcal{D}$ , da sich der Grundbereich nicht geändert hat.

Es gibt  $\pi_0$  in  $T$  mit  $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$ .

Nur der Fall  $\pi_0 = \pi$  ist interessant.

Aus  $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F(x_1, \dots, x_n)$  folgt nach Konstruktion von  $\mathcal{D}'$  auch

$$(\mathcal{D}', \beta) \models F(f(x_1, \dots, x_n))$$

.

Da in den restlichen Formeln des Pfades  $\pi$  und in  $M$  das Zeichen  $f$  nicht vorkommt, erhalten wir insgesamt

$$(\mathcal{D}', \beta) \models \pi \cup \{F(f(x_1, \dots, x_n))\} \text{ und } (\mathcal{D}', \beta) \models M.$$

## Theorem

- *Ist  $\mathcal{D}$  Modell von  $T$  über  $M$*
- *und entsteht  $T'$  aus  $T$  durch Schließen eines Pfades,*
- *dann ist  $\mathcal{D}$  auch Modell von  $T'$ .*

# Beweis des Korrektheitslemma

Sei  $\beta'$  eine beliebige Belegung.

Gemäß Voraussetzung gibt es zu jeder Belegung  $\beta$  einen Pfad  $\pi$  in  $T$  mit  $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi$ .

$T'$  entstehe durch Anwenden der Substitution  $\sigma$  und Schließen eines Pfades gemäß einer der beiden Möglichkeiten in der Definition.

Wir definieren  $\beta(y) = \text{val}_{\beta'}(\sigma(y))$ ,

Nach dem Substitutionslemma gilt für alle  $C$

$$(\mathcal{D}, \beta) \models C \text{ gdw. } (\mathcal{D}, \beta') \models \sigma(C)$$

so daß aus  $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi$  folgt:

$$(\mathcal{D}, \beta') \models \sigma(\pi)$$

Sei  $A \in For_{\Sigma}$ ,  $M \subseteq For_{\Sigma}$ , alle ohne freie Variablen.  
Das Anfangstableau  $T_0$  für diese Beweisaufgabe besteht aus einem einzigen Pfad auf dem genau die folgenden Formeln liegen

- $0A$
- $1B$  für alle  $B \in M$

## Beobachtungen

- $T_0$  für  $A$  über  $M$  ist unerfüllbar genau dann wenn,  $M \models A$ .
- ein geschlossenes Tableau ist unerfüllbar

Sei  $A \in For_{\Sigma}$ ,  $M \subseteq For_{\Sigma}$ , alle ohne freie Variablen.  
Das Anfangstableau  $T_0$  für diese Beweisaufgabe besteht aus einem einzigen Pfad auf dem genau die folgenden Formeln liegen

- $0A$
- $1B$  für alle  $B \in M$

## Beobachtungen

- $T_0$  für  $A$  über  $M$  ist unerfüllbar genau dann wenn,  $M \models A$ .
- ein geschlossenes Tableau ist unerfüllbar

Sei  $A \in For_{\Sigma}$ ,  $M \subseteq For_{\Sigma}$ , alle ohne freie Variablen.  
Das Anfangstableau  $T_0$  für diese Beweisaufgabe besteht aus einem einzigen Pfad auf dem genau die folgenden Formeln liegen

- $0A$
- $1B$  für alle  $B \in M$

## Beobachtungen

- $T_0$  für  $A$  über  $M$  ist unerfüllbar genau dann wenn,  $M \models A$ .
- ein geschlossenes Tableau ist unerfüllbar

Sei  $A \in For_{\Sigma}$ ,  $M \subseteq For_{\Sigma}$ , alle ohne freie Variablen.  
Das Anfangstableau  $T_0$  für diese Beweisaufgabe besteht aus einem einzigen Pfad auf dem genau die folgenden Formeln liegen

- $0A$
- $1B$  für alle  $B \in M$

## Beobachtungen

- $T_0$  für  $A$  über  $M$  ist unerfüllbar genau dann wenn,  $M \models A$ .
- ein geschlossenes Tableau ist unerfüllbar

## Theorem

*Sei  $A \in \text{For}_\Sigma$ ,  $M \subseteq \text{For}_\Sigma$ , alle ohne freie Variablen  
Wenn es ein geschlossenes Tableau für  $A$  über  $M$  gibt, dann ist  
 $M \models A$ .*

*Beweis:*

$T_0$	Anfangstableau	nicht erfüllbar
$\vdots$		
$T_k$	Zwischentableau	nicht erfüllbar nach vorigem Theorem
$T_{k+1}$	Zwischentableau	nicht erfüllbar
$\vdots$		
$T_n$	geschlossenes Tableau	nicht erfüllbar

## Theorem

*Sei  $A \in \text{For}_\Sigma$ ,  $M \subseteq \text{For}_\Sigma$ , alle ohne freie Variablen  
Wenn es ein geschlossenes Tableau für  $A$  über  $M$  gibt, dann ist  
 $M \models A$ .*

*Beweis:*

$T_0$	Anfangstableau	nicht erfüllbar
$\vdots$		
$T_k$	Zwischentableau	nicht erfüllbar nach vorigem Theorem
$T_{k+1}$	Zwischentableau	nicht erfüllbar
$\vdots$		
$T_n$	geschlossenes Tableau	nicht erfüllbar

## Theorem

Sei  $A \in \text{For}_\Sigma$ ,  $M \subseteq \text{For}_\Sigma$ , alle ohne freie Variablen  
Wenn es ein geschlossenes Tableau für  $A$  über  $M$  gibt, dann ist  
 $M \models A$ .

*Beweis:*

$T_0$	Anfangstableau	nicht erfüllbar
$\vdots$		
$T_k$	Zwischentableau	nicht erfüllbar nach vorigem Theorem
$T_{k+1}$	Zwischentableau	nicht erfüllbar
$\vdots$		
$T_n$	geschlossenes Tableau	nicht erfüllbar

## Theorem

Sei  $A \in \text{For}_\Sigma$ ,  $M \subseteq \text{For}_\Sigma$ , alle ohne freie Variablen  
Wenn es ein geschlossenes Tableau für  $A$  über  $M$  gibt, dann ist  
 $M \models A$ .

*Beweis:*

$T_0$	Anfangstableau	nicht erfüllbar
$\vdots$		
$T_k$	Zwischentableau	nicht erfüllbar nach vorigem Theorem
$T_{k+1}$	Zwischentableau	nicht erfüllbar
$\vdots$		
$T_n$	geschlossenes Tableau	nicht erfüllbar

## Theorem

Sei  $A \in \text{For}_\Sigma$ ,  $M \subseteq \text{For}_\Sigma$ , alle ohne freie Variablen  
Wenn es ein geschlossenes Tableau für  $A$  über  $M$  gibt, dann ist  
 $M \models A$ .

*Beweis:*

$T_0$	Anfangstableau	nicht erfüllbar
$\vdots$		
$T_k$	Zwischentableau	nicht erfüllbar nach vorigem Theorem
$T_{k+1}$	Zwischentableau	nicht erfüllbar
$\vdots$		
$T_n$	geschlossenes Tableau	nicht erfüllbar

## Theorem

Sei  $A \in \text{For}_\Sigma$ ,  $M \subseteq \text{For}_\Sigma$ , alle ohne freie Variablen  
Wenn es ein geschlossenes Tableau für  $A$  über  $M$  gibt, dann ist  
 $M \models A$ .

*Beweis:*

$T_0$	Anfangstableau	nicht erfüllbar
$\vdots$		
$T_k$	Zwischentableau	nicht erfüllbar nach vorigem Theorem
$T_{k+1}$	Zwischentableau	nicht erfüllbar
$\vdots$		
$T_n$	geschlossenes Tableau	nicht erfüllbar

## Theorem

Sei  $A \in \text{For}_\Sigma$ ,  $M \subseteq \text{For}_\Sigma$ , alle ohne freie Variablen  
Wenn es ein geschlossenes Tableau für  $A$  über  $M$  gibt, dann ist  
 $M \models A$ .

*Beweis:*

$T_0$	Anfangstableau	nicht erfüllbar
$\vdots$		
$T_k$	Zwischentableau	nicht erfüllbar nach vorigem Theorem
$T_{k+1}$	Zwischentableau	nicht erfüllbar
$\vdots$		
$T_n$	geschlossenes Tableau	nicht erfüllbar

# Ein offenes Tableau

$$1[] \quad 0 \forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0 \exists y \forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1 \forall x \exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0 \forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1 \exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0 p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1 p(X, g(X))$$

offener Pfad  $\pi$

Noch nicht (abschließend) behandelte Formeln

Modell  $\mathcal{D}$  für alle Formeln in  $\pi$ :

$$\begin{aligned}
 D &= \{a, b\} \\
 f^{\mathcal{D}}(x) &= \begin{cases} b & \text{falls } x = a \\ a & \text{falls } x = b \end{cases} \\
 g^{\mathcal{D}}(x) &= x \\
 p^{\mathcal{D}}(x, y) &\Leftrightarrow x = y
 \end{aligned}$$

# Ein offenes Tableau

$$1[] \quad 0 \forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0 \exists y \forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1 \forall x \exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0 \forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1 \exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0 p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1 p(X, g(X))$$

offener Pfad  $\pi$

Noch nicht (abschließend) behandelte Formeln

Modell  $\mathcal{D}$  für alle Formeln in  $\pi$ :

$$\begin{aligned}
 D &= \{a, b\} \\
 f^{\mathcal{D}}(x) &= \begin{cases} b & \text{falls } x = a \\ a & \text{falls } x = b \end{cases} \\
 g^{\mathcal{D}}(x) &= x \\
 p^{\mathcal{D}}(x, y) &\Leftrightarrow x = y
 \end{aligned}$$

# Ein offenes Tableau

$$1[] \quad 0 \forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0 \exists y \forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1 \forall x \exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0 \forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1 \exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0 p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1 p(X, g(X))$$

offener Pfad  $\pi$

Noch nicht (abschließend) behandelte Formeln

Modell  $\mathcal{D}$  für alle Formeln in  $\pi$ :

$$D = \{a, b\}$$

$$f^{\mathcal{D}}(x) = \begin{cases} b & \text{falls } x = a \\ a & \text{falls } x = b \end{cases}$$

$$g^{\mathcal{D}}(x) = x$$

$$p^{\mathcal{D}}(x, y) \Leftrightarrow x = y$$

$$1[] \quad 0 \forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0 \exists y \forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1 \forall x \exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0 \forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1 \exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0 p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1 p(X, g(X))$$

$$8[2] \quad 0 \forall x p(x, V)$$

$$9[3] \quad 1 \exists y p(U, y)$$

$$10[8] \quad 0 p(f'(V), V)$$

$$11[9] \quad 1 p(U, g'(U))$$

offener Pfad  $\pi$

Noch nicht (abschließend) behandelte Formeln

## Definition

Eine Menge  $H$  geschlossener Vorzeichenformeln über einer Signatur  $\Sigma$  heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (H 1) Gilt für eine  $\alpha$ -Formel  $F$ ,  $F \in H$ , dann auch  $F_1 \in H$  und  $F_2 \in H$ .
- (H 2) Gilt  $F \in H$  für eine  $\beta$ -Formel  $F$ , dann auch  $F_1 \in H$  oder  $F_2 \in H$ .
- (H 3) Gilt  $F \in H$  für eine  $\delta$ -Formel  $F$ ,  
dann gibt es einen Grundterm  $t$  mit  $F_1(t) \in H$ .
- (H 4) Gilt  $F \in H$  für eine  $\gamma$ -Formel  $F$ ,  
dann gilt  $F_1(t) \in H$  für jeden Grundterm  $t$ .
- (H 5) Für keine  $A$  kommen  $1A$  und  $0A$  in  $H$  vor.

## Definition

Eine Menge  $H$  geschlossener Vorzeichenformeln über einer Signatur  $\Sigma$  heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (H 1) Gilt für eine  $\alpha$ -Formel  $F$ ,  $F \in H$ , dann auch  $F_1 \in H$  und  $F_2 \in H$ .
- (H 2) Gilt  $F \in H$  für eine  $\beta$ -Formel  $F$ , dann auch  $F_1 \in H$  oder  $F_2 \in H$ .
- (H 3) Gilt  $F \in H$  für eine  $\delta$ -Formel  $F$ ,  
dann gibt es einen Grundterm  $t$  mit  $F_1(t) \in H$ .
- (H 4) Gilt  $F \in H$  für eine  $\gamma$ -Formel  $F$ ,  
dann gilt  $F_1(t) \in H$  für jeden Grundterm  $t$ .
- (H 5) Für keine  $A$  kommen  $1A$  und  $0A$  in  $H$  vor.

## Definition

Eine Menge  $H$  geschlossener Vorzeichenformeln über einer Signatur  $\Sigma$  heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (H 1) Gilt für eine  $\alpha$ -Formel  $F$ ,  $F \in H$ , dann auch  $F_1 \in H$  und  $F_2 \in H$ .
- (H 2) Gilt  $F \in H$  für eine  $\beta$ -Formel  $F$ , dann auch  $F_1 \in H$  oder  $F_2 \in H$ .
- (H 3) Gilt  $F \in H$  für eine  $\delta$ -Formel  $F$ ,  
dann gibt es einen Grundterm  $t$  mit  $F_1(t) \in H$ .
- (H 4) Gilt  $F \in H$  für eine  $\gamma$ -Formel  $F$ ,  
dann gilt  $F_1(t) \in H$  für jeden Grundterm  $t$ .
- (H 5) Für keine  $A$  kommen  $1A$  und  $0A$  in  $H$  vor.

## Definition

Eine Menge  $H$  geschlossener Vorzeichenformeln über einer Signatur  $\Sigma$  heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (H 1) Gilt für eine  $\alpha$ -Formel  $F$ ,  $F \in H$ , dann auch  $F_1 \in H$  und  $F_2 \in H$ .
- (H 2) Gilt  $F \in H$  für eine  $\beta$ -Formel  $F$ , dann auch  $F_1 \in H$  oder  $F_2 \in H$ .
- (H 3) Gilt  $F \in H$  für eine  $\delta$ -Formel  $F$ ,  
dann gibt es einen Grundterm  $t$  mit  $F_1(t) \in H$ .
- (H 4) Gilt  $F \in H$  für eine  $\gamma$ -Formel  $F$ ,  
dann gilt  $F_1(t) \in H$  für jeden Grundterm  $t$ .
- (H 5) Für keine  $A$  kommen  $1A$  und  $0A$  in  $H$  vor.

## Definition

Eine Menge  $H$  geschlossener Vorzeichenformeln über einer Signatur  $\Sigma$  heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (H 1) Gilt für eine  $\alpha$ -Formel  $F$ ,  $F \in H$ , dann auch  $F_1 \in H$  und  $F_2 \in H$ .
- (H 2) Gilt  $F \in H$  für eine  $\beta$ -Formel  $F$ , dann auch  $F_1 \in H$  oder  $F_2 \in H$ .
- (H 3) Gilt  $F \in H$  für eine  $\delta$ -Formel  $F$ ,  
dann gibt es einen Grundterm  $t$  mit  $F_1(t) \in H$ .
- (H 4) Gilt  $F \in H$  für eine  $\gamma$ -Formel  $F$ ,  
dann gilt  $F_1(t) \in H$  für jeden Grundterm  $t$ .
- (H 5) Für keine  $A$  kommen  $1A$  und  $0A$  in  $H$  vor.

## Theorem

*Jede Hintikka-Menge  $H$  besitzt ein Modell.*

### **Beweis:**

Wir setzen

$$D = \{t : t \text{ ein Grundterm}\}$$

Die Interpretationsfunktion  $I$  wird definiert durch

$$I(f)(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$$

$$(t_1, \dots, t_n) \in I(p) \Leftrightarrow 1p(t_1, \dots, t_n) \in H$$

## Theorem

*Jede Hintikka-Menge  $H$  besitzt ein Modell.*

### **Beweis:**

Wir setzen

$$D = \{t : t \text{ ein Grundterm}\}$$

Die Interpretationsfunktion  $I$  wird definiert durch

$$I(f)(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$$

$$(t_1, \dots, t_n) \in I(p) \Leftrightarrow 1p(t_1, \dots, t_n) \in H$$

## Theorem

*Jede Hintikka-Menge  $H$  besitzt ein Modell.*

### **Beweis:**

Wir setzen

$$D = \{t : t \text{ ein Grundterm}\}$$

Die Interpretationsfunktion  $I$  wird definiert durch

$$I(f)(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$$

$$(t_1, \dots, t_n) \in I(p) \Leftrightarrow 1p(t_1, \dots, t_n) \in H$$

# Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 1)

Mit der obigen Definition gilt für jeden Grundterm:

$$I(t) = t$$

Wir beweisen diese Behauptung durch Induktion über den Termaufbau.

Für  $t = c$ , ein Konstantensymbol, gilt nach Definition

$$I(c) = c.$$

Sei jetzt  $t = f(t_1, \dots, t_n)$ :

$$\begin{aligned} I(t) &= I(f)(t_1^{\mathcal{D}}, \dots, t_n^{\mathcal{D}}) && \text{(Def. von } I(t)) \\ &= I(f)(t_1, \dots, t_n) && \text{(Ind. Vor.)} \\ &= f(t_1, \dots, t_n) && \text{(Def. von } I(f)) \end{aligned}$$

# Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 1)

Mit der obigen Definition gilt für jeden Grundterm:

$$I(t) = t$$

Wir beweisen diese Behauptung durch Induktion über den Termaufbau.

Für  $t = c$ , ein Konstantensymbol, gilt nach Definition

$$I(c) = c.$$

Sei jetzt  $t = f(t_1, \dots, t_n)$ :

$$\begin{aligned} I(t) &= I(f)(t_1^{\mathcal{D}}, \dots, t_n^{\mathcal{D}}) && \text{(Def. von } I(t)) \\ &= I(f)(t_1, \dots, t_n) && \text{(Ind.Vor.)} \\ &= f(t_1, \dots, t_n) && \text{(Def. von } I(f)) \end{aligned}$$

## Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 2)

Es bleibt, um den Beweis des Modell-Lemmas zu vervollständigen, noch nachzuweisen, daß für jede Formel  $F \in H$  gilt

$$(D, I) \models F.$$

Dieser Nachweis wird wieder durch Induktion über den Aufbau von  $F$  geführt.

(Man beachte, daß  $H$  nur geschlossene Formeln enthält.)

1. Fall:  $F = 1p(t_1, \dots, t_n)$

Falls  $F \in H$ , dann gilt  $\mathcal{D} \models F$  nach Definition von  $\mathcal{D}$ .

2. Fall:  $F = 0p(t_1, \dots, t_n)$ .

Wenn  $F \in H$ , dann gilt wegen (H 6)

$1p(t_1, \dots, t_n) \notin H$ . Nach Definition von  $(D, I)$  also  $(D, I) \not\models p(t_1, \dots, t_n)$ , d. h.  $(D, I) \models \neg p(t_1, \dots, t_n)$

Die weiteren Induktionsschritte sind jetzt einfache

## Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 2)

Es bleibt, um den Beweis des Modell-Lemmas zu vervollständigen, noch nachzuweisen, daß für jede Formel  $F \in H$  gilt

$$(D, I) \models F.$$

Dieser Nachweis wird wieder durch Induktion über den Aufbau von  $F$  geführt.

(Man beachte, daß  $H$  nur geschlossene Formeln enthält.)

1. Fall:  $F = \neg p(t_1, \dots, t_n)$

Falls  $F \in H$ , dann gilt  $\mathcal{D} \models F$  nach Definition von  $\mathcal{D}$ .

2. Fall:  $F = p(t_1, \dots, t_n)$ .

Wenn  $F \in H$ , dann gilt wegen (H 6)

$\neg p(t_1, \dots, t_n) \notin H$ . Nach Definition von  $(D, I)$  also  $(D, I) \not\models p(t_1, \dots, t_n)$ , d. h.  $(D, I) \models \neg p(t_1, \dots, t_n)$

Die weiteren Induktionsschritte sind jetzt einfache

## Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 2)

Es bleibt, um den Beweis des Modell-Lemmas zu vervollständigen, noch nachzuweisen, daß für jede Formel  $F \in H$  gilt

$$(D, I) \models F.$$

Dieser Nachweis wird wieder durch Induktion über den Aufbau von  $F$  geführt.

(Man beachte, daß  $H$  nur geschlossene Formeln enthält.)

1. Fall:  $F = 1p(t_1, \dots, t_n)$

Falls  $F \in H$ , dann gilt  $\mathcal{D} \models F$  nach Definition von  $\mathcal{D}$ .

2. Fall:  $F = 0p(t_1, \dots, t_n)$ .

Wenn  $F \in H$ , dann gilt wegen (H 6)

$1p(t_1, \dots, t_n) \notin H$ . Nach Definition von  $(D, I)$  also  $(D, I) \not\models p(t_1, \dots, t_n)$ , d. h.  $(D, I) \models \neg p(t_1, \dots, t_n)$

Die weiteren Induktionsschritte sind jetzt einfache

## Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 2)

Es bleibt, um den Beweis des Modell-Lemmas zu vervollständigen, noch nachzuweisen, daß für jede Formel  $F \in H$  gilt

$$(D, I) \models F.$$

Dieser Nachweis wird wieder durch Induktion über den Aufbau von  $F$  geführt.

(Man beachte, daß  $H$  nur geschlossene Formeln enthält.)

1. Fall:  $F = 1p(t_1, \dots, t_n)$

Falls  $F \in H$ , dann gilt  $\mathcal{D} \models F$  nach Definition von  $\mathcal{D}$ .

2. Fall:  $F = 0p(t_1, \dots, t_n)$ .

Wenn  $F \in H$ , dann gilt wegen (H 6)

$1p(t_1, \dots, t_n) \notin H$ . Nach Definition von  $(D, I)$  also  $(D, I) \not\models p(t_1, \dots, t_n)$ , d. h.  $(D, I) \models \neg p(t_1, \dots, t_n)$

Die weiteren Induktionsschritte sind jetzt einfache

# Konstruktionsvorschrift

Es sei  $t_1, \dots, t_n, \dots$  eine Aufzählung aller Grundterme.

Parallel zur Konstruktion einer Folge von Tableaus  $\mathcal{T}_i$  wird eine Folge von Grundsubstitutionen  $\sigma_i$  erzeugt.

Entsteht  $\mathcal{T}_{i+1}$  aus  $\mathcal{T}_i$  durch Anwendung einer  $\gamma$ -Regel mit der Formel  $F$  auf dem Pfad  $\pi$  dann ist

$$\sigma_{i+1} = \{X/t_n\} \circ \sigma_i,$$

wobei  $X$  die neu eingeführte Variable ist und es sich um die  $n$ -te Anwendung der  $\gamma$ -Regel für  $F$  auf  $\pi$  handelt.

Sonst  $\sigma_{i+1} = \sigma_i$ .

Ein Pfad  $\pi$  im Tableau  $\mathcal{T}_i$  wird nicht erweitert, wenn  $\sigma_i(\pi)$  abgeschlossen ist.

# Konstruktionsvorschrift

Es sei  $t_1, \dots, t_n, \dots$  eine Aufzählung aller Grundterme.

Parallel zur Konstruktion einer Folge von Tableaus  $\mathcal{T}_i$  wird eine Folge von Grundsubstitutionen  $\sigma_i$  erzeugt.

Entsteht  $\mathcal{T}_{i+1}$  aus  $\mathcal{T}_i$  durch Anwendung einer  $\gamma$ -Regel mit der Formel  $F$  auf dem Pfad  $\pi$  dann ist

$$\sigma_{i+1} = \{X/t_n\} \circ \sigma_i,$$

wobei  $X$  die neu eingeführte Variable ist und es sich um die  $n$ -te Anwendung der  $\gamma$ -Regel für  $F$  auf  $\pi$  handelt.

Sonst  $\sigma_{i+1} = \sigma_i$ .

Ein Pfad  $\pi$  im Tableau  $\mathcal{T}_i$  wird nicht erweitert, wenn  $\sigma_i(\pi)$  abgeschlossen ist.

# Konstruktionsvorschrift

Es sei  $t_1, \dots, t_n, \dots$  eine Aufzählung aller Grundterme.

Parallel zur Konstruktion einer Folge von Tableaus  $\mathcal{T}_i$  wird eine Folge von Grundsubstitutionen  $\sigma_i$  erzeugt.

Entsteht  $\mathcal{T}_{i+1}$  aus  $\mathcal{T}_i$  durch Anwendung einer  $\gamma$ -Regel mit der Formel  $F$  auf dem Pfad  $\pi$  dann ist

$$\sigma_{i+1} = \{X/t_n\} \circ \sigma_i,$$

wobei  $X$  die neu eingeführte Variable ist und es sich um die  $n$ -te Anwendung der  $\gamma$ -Regel für  $F$  auf  $\pi$  handelt.

Sonst  $\sigma_{i+1} = \sigma_i$ .

Ein Pfad  $\pi$  im Tableau  $\mathcal{T}_i$  wird nicht erweitert, wenn  $\sigma_i(\pi)$  abgeschlossen ist.

# Konstruktionsvorschrift

Es sei  $t_1, \dots, t_n, \dots$  eine Aufzählung aller Grundterme.

Parallel zur Konstruktion einer Folge von Tableaus  $\mathcal{T}_i$  wird eine Folge von Grundsubstitutionen  $\sigma_i$  erzeugt.

Entsteht  $\mathcal{T}_{i+1}$  aus  $\mathcal{T}_i$  durch Anwendung einer  $\gamma$ -Regel mit der Formel  $F$  auf dem Pfad  $\pi$  dann ist

$$\sigma_{i+1} = \{X/t_n\} \circ \sigma_i,$$

wobei  $X$  die neu eingeführte Variable ist und es sich um die  $n$ -te Anwendung der  $\gamma$ -Regel für  $F$  auf  $\pi$  handelt.

Sonst  $\sigma_{i+1} = \sigma_i$ .

Ein Pfad  $\pi$  im Tableau  $\mathcal{T}_i$  wird nicht erweitert, wenn  $\sigma_i(\pi)$  abgeschlossen ist.

# Konstruktionsvorschrift

Es sei  $t_1, \dots, t_n, \dots$  eine Aufzählung aller Grundterme.

Parallel zur Konstruktion einer Folge von Tableaus  $\mathcal{T}_i$  wird eine Folge von Grundsubstitutionen  $\sigma_i$  erzeugt.

Entsteht  $\mathcal{T}_{i+1}$  aus  $\mathcal{T}_i$  durch Anwendung einer  $\gamma$ -Regel mit der Formel  $F$  auf dem Pfad  $\pi$  dann ist

$$\sigma_{i+1} = \{X/t_n\} \circ \sigma_i,$$

wobei  $X$  die neu eingeführte Variable ist und es sich um die  $n$ -te Anwendung der  $\gamma$ -Regel für  $F$  auf  $\pi$  handelt.

Sonst  $\sigma_{i+1} = \sigma_i$ .

Ein Pfad  $\pi$  im Tableau  $\mathcal{T}_i$  wird nicht erweitert, wenn  $\sigma_i(\pi)$  abgeschlossen ist.

## Theorem

*Sei  $A$  eine Formel und  $M$  eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.*

*Gilt  $M \models A$   
dann terminiert jedes*

- faire Verfahren,*
- das mit  $\emptyset A$  und  $\sigma_0 = id$  beginnt,*
- und die Konstruktionsvorschrift einhält*

## Theorem

*Sei  $A$  eine Formel und  $M$  eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.*

*Gilt  $M \models A$   
dann terminiert jedes*

- *faire Verfahren,*
- *das mit  $\emptyset A$  und  $\sigma_0 = id$  beginnt,*
- *und die Konstruktionsvorschrift einhält*

## Theorem

*Sei  $A$  eine Formel und  $M$  eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.*

*Gilt  $M \models A$   
dann terminiert jedes*

- *faire Verfahren,*
- *das mit  $\perp A$  und  $\sigma_0 = id$  beginnt,*
- *und die Konstruktionsvorschrift einhält*

## Theorem

*Sei  $A$  eine Formel und  $M$  eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.*

*Gilt  $M \models A$   
dann terminiert jedes*

- *faire Verfahren,*
- *das mit  $\emptyset A$  und  $\sigma_0 = id$  beginnt,*
- *und die Konstruktionsvorschrift einhält*

## Theorem

*Sei  $A$  eine Formel und  $M$  eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.*

*Gilt  $M \models A$*

*dann terminiert jedes*

- *faire Verfahren,*
- *das mit  $\emptyset A$  und  $\sigma_0 = id$  beginnt,*
- *und die Konstruktionsvorschrift einhält*

*nach endlich vielen Schritten in einem geschlossenen Tableau.*

## Theorem

*Sei  $A$  eine Formel und  $M$  eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.*

*Gilt  $M \models A$   
dann terminiert jedes*

- *faire Verfahren,*
- *das mit  $\perp A$  und  $\sigma_0 = id$  beginnt,*
- *und die Konstruktionsvorschrift einhält*

*nach endlich vielen Schritten in einem geschlossenen Tableau.*

*Fairness* bedeutet, daß auf jedem Pfad, jede mögliche Regelanwendung auch schließlich stattfindet.

## Theorem

*Sei  $A$  eine Formel und  $M$  eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.*

*Gilt  $M \models A$   
dann terminiert jedes*

- *faire Verfahren,*
- *das mit  $\perp A$  und  $\sigma_0 = id$  beginnt,*
- *und die Konstruktionsvorschrift einhält*

*nach endlich vielen Schritten in einem geschlossenen Tableau.*

*Fairness* bedeutet, daß auf jedem Pfad, jede mögliche Regelanwendung auch schließlich stattfindet.

Insbesondere wird auf jedem offenen Pfad jede  $\gamma$ -Formel unbeschränkt oft benutzt.

## Theorem

*Sei  $A$  eine Formel und  $M$  eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.*

*Gilt*  $M \models A$   
*dann terminiert jedes*

- *faire Verfahren,*
- *das mit  $\perp A$  und  $\sigma_0 = id$  beginnt,*
- *und die Konstruktionsvorschrift einhält*

*nach endlich vielen Schritten in einem geschlossenen Tableau.*

*Fairness* bedeutet, daß auf jedem Pfad, jede mögliche Regelanwendung auch schließlich stattfindet.

Insbesondere wird auf jedem offenen Pfad jede  $\gamma$ -Formel unbeschränkt oft benutzt.

In jedem unendlichen,  
endlich verzweigenden  
Baum existiert ein  
unendlicher Pfad.

Angenommen die fair konstruierte Folge  $(\mathcal{T}_0, \sigma_0), \dots, (\mathcal{T}_n, \sigma_n) \dots$  terminiert nicht.

Wir wollen ein Modell  $\mathcal{D}$  finden mit  $\mathcal{D} \models M$  und  $\mathcal{D} \models \neg A$

Setze  $\mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}_i$  und  $\sigma = \bigcup_{i \geq 0} \sigma_i$ .

$\sigma(\mathcal{T})$  ist ein unendlicher endlich verzweigender Baum.

Nach Königs Lemma gibt es einen unendlichen Pfad  $\pi$  in  $\sigma(\mathcal{T})$ .

Noch Konstruktion muß  $\pi$  ein offener Pfad sein.

$H = \pi$  ist eine Hintikka-Menge.

Angenommen die fair konstruierte Folge  $(\mathcal{T}_0, \sigma_0), \dots, (\mathcal{T}_n, \sigma_n) \dots$  terminiert nicht.

Wir wollen ein Modell  $\mathcal{D}$  finden mit  $\mathcal{D} \models M$  und  $\mathcal{D} \models \neg A$

Setze  $\mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}_i$  und  $\sigma = \bigcup_{i \geq 0} \sigma_i$ .

$\sigma(\mathcal{T})$  ist ein unendlicher endlich verzweigender Baum.

Nach Königs Lemma gibt es einen unendlichen Pfad  $\pi$  in  $\sigma(\mathcal{T})$ .

Noch Konstruktion muß  $\pi$  ein offener Pfad sein.

$H = \pi$  ist eine Hintikka-Menge.

Angenommen die fair konstruierte Folge  $(\mathcal{T}_0, \sigma_0), \dots, (\mathcal{T}_n, \sigma_n) \dots$  terminiert nicht.

Wir wollen ein Modell  $\mathcal{D}$  finden mit  $\mathcal{D} \models M$  und  $\mathcal{D} \models \neg A$

Setze  $\mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}_i$  und  $\sigma = \bigcup_{i \geq 0} \sigma_i$ .

$\sigma(\mathcal{T})$  ist ein unendlicher endlich verzweigender Baum.

Nach Königs Lemma gibt es einen unendlichen Pfad  $\pi$  in  $\sigma(\mathcal{T})$ .

Noch Konstruktion muß  $\pi$  ein offener Pfad sein.

$H = \pi$  ist eine Hintikka-Menge.

Angenommen die fair konstruierte Folge  $(\mathcal{T}_0, \sigma_0), \dots, (\mathcal{T}_n, \sigma_n) \dots$  terminiert nicht.

Wir wollen ein Modell  $\mathcal{D}$  finden mit  $\mathcal{D} \models M$  und  $\mathcal{D} \models \neg A$

Setze  $\mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}_i$  und  $\sigma = \bigcup_{i \geq 0} \sigma_i$ .

$\sigma(\mathcal{T})$  ist ein unendlicher endlich verzweigender Baum.

Nach Königs Lemma gibt es einen unendlichen Pfad  $\pi$  in  $\sigma(\mathcal{T})$ .

Noch Konstruktion muß  $\pi$  ein offener Pfad sein.

$H = \pi$  ist eine Hintikka-Menge.

Angenommen die fair konstruierte Folge  $(\mathcal{T}_0, \sigma_0), \dots, (\mathcal{T}_n, \sigma_n) \dots$  terminiert nicht.

Wir wollen ein Modell  $\mathcal{D}$  finden mit  $\mathcal{D} \models M$  und  $\mathcal{D} \models \neg A$

Setze  $\mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}_i$  und  $\sigma = \bigcup_{i \geq 0} \sigma_i$ .

$\sigma(\mathcal{T})$  ist ein unendlicher endlich verzweigender Baum.

Nach Königs Lemma gibt es einen unendlichen Pfad  $\pi$  in  $\sigma(\mathcal{T})$ .

Noch Konstruktion muß  $\pi$  ein offener Pfad sein.

$H = \pi$  ist eine Hintikka-Menge.

Angenommen die fair konstruierte Folge  $(\mathcal{T}_0, \sigma_0), \dots, (\mathcal{T}_n, \sigma_n) \dots$  terminiert nicht.

Wir wollen ein Modell  $\mathcal{D}$  finden mit  $\mathcal{D} \models M$  und  $\mathcal{D} \models \neg A$

Setze  $\mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}_i$  und  $\sigma = \bigcup_{i \geq 0} \sigma_i$ .

$\sigma(\mathcal{T})$  ist ein unendlicher endlich verzweigender Baum.

Nach Königs Lemma gibt es einen unendlichen Pfad  $\pi$  in  $\sigma(\mathcal{T})$ .

Noch Konstruktion muß  $\pi$  ein offener Pfad sein.

$H = \pi$  ist eine Hintikka-Menge.

Angenommen die fair konstruierte Folge  $(\mathcal{T}_0, \sigma_0), \dots, (\mathcal{T}_n, \sigma_n) \dots$  terminiert nicht.

Wir wollen ein Modell  $\mathcal{D}$  finden mit  $\mathcal{D} \models M$  und  $\mathcal{D} \models \neg A$

Setze  $\mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}_i$  und  $\sigma = \bigcup_{i \geq 0} \sigma_i$ .

$\sigma(\mathcal{T})$  ist ein unendlicher endlich verzweigender Baum.

Nach Königs Lemma gibt es einen unendlichen Pfad  $\pi$  in  $\sigma(\mathcal{T})$ .

Noch Konstruktion muß  $\pi$  ein offener Pfad sein.

$H = \pi$  ist eine Hintikka-Menge.

## Definition

Eine Menge  $H$  geschlossener Vorzeichenformeln über einer Signatur  $\Sigma$  heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (H 1) Gilt für eine  $\alpha$ -Formel  $F$ ,  $F \in H$ , dann auch  $F_1 \in H$  und  $F_2 \in H$ .
- (H 2) Gilt  $F \in H$  für eine  $\beta$ -Formel  $F$ , dann auch  $F_1 \in H$  oder  $F_2 \in H$ .
- (H 3) Gilt  $F \in H$  für eine  $\delta$ -Formel  $F$ ,  
dann gibt es einen Grundterm  $t$  mit  $F_1(t) \in H$ .
- (H 4) Gilt  $F \in H$  für eine  $\gamma$ -Formel  $F$ ,  
dann gilt  $F_1(t) \in H$  für jeden Grundterm  $t$ .
- (H 5) Für keine  $A$  kommen  $1A$  und  $0A$  in  $H$  vor.

# Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz

$$p(x) \models \forall x p(x)$$

geschlossenes Tableau

$$\forall x p(x) \text{ über } p(x)$$

# Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$

# Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr

# Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$		$p(a)$ über $p(x)$	

# Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	

# Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

## Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr

# Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

## Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a) \wedge p(b)$		$p(a) \wedge p(b)$ über $p(x)$	

# Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

## Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a) \wedge p(b)$	wahr	$p(a) \wedge p(b)$ über $p(x)$	

# Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

## Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a) \wedge p(b)$	wahr	$p(a) \wedge p(b)$ über $p(x)$	falsch

# Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

## Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a) \wedge p(b)$	wahr	$p(a) \wedge p(b)$ über $p(x)$	falsch
$\exists x p(x) \models p(x)$		$p(x)$ über $\exists x p(x)$	

# Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

## Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a) \wedge p(b)$	wahr	$p(a) \wedge p(b)$ über $p(x)$	falsch
$\exists x p(x) \models p(x)$	falsch	$p(x)$ über $\exists x p(x)$	

# Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

## Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a) \wedge p(b)$	wahr	$p(a) \wedge p(b)$ über $p(x)$	falsch
$\exists x p(x) \models p(x)$	falsch	$p(x)$ über $\exists x p(x)$	wahr

# Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

## Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a) \wedge p(b)$	wahr	$p(a) \wedge p(b)$ über $p(x)$	falsch
$\exists x p(x) \models p(x)$	falsch	$p(x)$ über $\exists x p(x)$	wahr
$p(x) \models p(y) \wedge p(z)$		$p(y) \wedge p(z)$ über $p(x)$	

# Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

## Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a) \wedge p(b)$	wahr	$p(a) \wedge p(b)$ über $p(x)$	falsch
$\exists x p(x) \models p(x)$	falsch	$p(x)$ über $\exists x p(x)$	wahr
$p(x) \models p(y) \wedge p(z)$	wahr	$p(y) \wedge p(z)$ über $p(x)$	

# Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

## Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a) \wedge p(b)$	wahr	$p(a) \wedge p(b)$ über $p(x)$	falsch
$\exists x p(x) \models p(x)$	falsch	$p(x)$ über $\exists x p(x)$	wahr
$p(x) \models p(y) \wedge p(z)$	wahr	$p(y) \wedge p(z)$ über $p(x)$	wahr

## Theorem

*Die folgenden Probleme sind unentscheidbar:*

- 1 *Ist eine prädikatenlogische Formel  $F \in \text{For}_\Sigma$  allgemeingültig?  
Triviale Signaturen  $\Sigma$  ausgenommen.*
- 2 *Was ist die maximale Anzahl von  $\gamma$ -Regelanwendungen in einem Tableaubeweis einer prädikatenlogische Formel  $F \in \text{For}_\Sigma$ ?*

## Theorem

*Die folgenden Probleme sind unentscheidbar:*

- 1 *Ist eine prädikatenlogische Formel  $F \in \text{For}_\Sigma$  allgemeingültig?  
Triviale Signaturen  $\Sigma$  ausgenommen.*
- 2 *Was ist die maximale Anzahl von  $\gamma$ -Regelanwendungen in einem Tableaubeweis einer prädikatenlogische Formel  $F \in \text{For}_\Sigma$ ?*

## Theorem

*Die folgenden Probleme sind unentscheidbar:*

- 1 *Ist eine prädikatenlogische Formel  $F \in \text{For}_\Sigma$  allgemeingültig?  
Triviale Signaturen  $\Sigma$  ausgenommen.*
- 2 *Was ist die maximale Anzahl von  $\gamma$ -Regelanwendungen in einem Tableaubeweis einer prädikatenlogische Formel  $F \in \text{For}_\Sigma$ ?*

# Rekursionstheoretische Eigenschaften der Prädikatenlogik

## Theorem

- ① *Die Menge der allgemeingültigen Formeln der Prädikatenlogik ist rekursiv aufzählbar.*
- ② *Die Menge der erfüllbaren Formeln der Prädikatenlogik ist **nicht** rekursiv aufzählbar.*

# Rekursionstheoretische Eigenschaften der Prädikatenlogik

## Theorem

- 1 *Die Menge der allgemeingültigen Formeln der Prädikatenlogik ist rekursiv aufzählbar.*
- 2 *Die Menge der erfüllbaren Formeln der Prädikatenlogik ist **nicht** rekursiv aufzählbar.*

# Rekursionstheoretische Eigenschaften der Prädikatenlogik

## Theorem

- 1 *Die Menge der allgemeingültigen Formeln der Prädikatenlogik ist rekursiv aufzählbar.*
- 2 *Die Menge der erfüllbaren Formeln der Prädikatenlogik ist **nicht** rekursiv aufzählbar.*