Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Dr. des. Vladimir Klebanov

Formale Systeme, WS 2009/2010

Übungsblatt 2

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 13.11.2008 besprochen.

Aufgabe 1

Zeigen Sie mithilfe des Resolutionskalküls

(a) die Unerfüllbarkeit der Formel

$$\{\{A, B, \neg C\}, \{\neg A\}, \{A, B, C\}, \{A, \neg B\}\} \ ,$$

(b) die Allgemeingültigkeit der Formel

$$(\neg B \land \neg C \land D) \lor (\neg B \land \neg D) \lor (C \land D) \lor B \ ,$$

(c) die Allgemeingültigkeit der Formel

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \ .$$

Aufgabe 2

Gegeben seien folgende Formeln der AL:

(a) $(A \lor B \lor C) \land (A \lor \neg C) \land (\neg A \lor B) \land \neg B$

(b) $(S \lor \neg P \lor Q) \land (S \lor \neg P \lor \neg R) \land \neg S \land P$

(c) $A \lor \neg A$

(d) $A \land (\neg A \lor B) \land (\neg B \lor \neg C \lor D) \land \neg E \land (\neg A \lor \neg C) \land D$

Entscheiden Sie, welche der angegebenen Formeln Hornformeln sind. Schreiben Sie die Formeln jeweils als eine Konjunktion von Implikationen. Verwenden Sie den Markierungsalgorithmus für Hornformeln, um zu prüfen, ob die Horn-Formeln erfüllbar sind. Geben Sie im Falle der Erfüllbarkeit ein Modell an. Wie könnte man den Markierungsalgorithmus heranziehen, um die Erfüllbarkeit der übrigen Formeln zu entscheiden?

Aufgabe 3

(a) Man könnte versucht sein, zur Verkürzung von Beweisen im Resolutionskalkül zwei Resolutionsanwendungen in einer neuen Regel zusammenzufassen:

$$\frac{C_1 \cup \{P, Q\}, \quad C_2 \cup \{\neg P, \neg Q\}}{C_1 \cup C_2}$$

Zeigen Sie, dass diese Regel nicht korrekt ist.

(b) Widerlegen Sie die Vollständigkeit einer Variante des Resolutionskalküls, bei der jede Klausel nur einmal zur Resolution verwendet werden darf.

Hinweis: Suchen Sie ein Gegenbeispiel (nicht ganz einfach!).

Aufgabe 4

Die lineare Resolution ist eine Variante der Resolution: Bei der Resolventenbildung muss eine der Elternklauseln entweder die Startklausel (eine zu Beginn frei gewählte Klausel) oder die Resolvente aus dem vorangegangenen Resolutionsschritt sein. Die jeweils andere Elternklausel kann frei gewählt werden.

Es gilt: Für jede unerfüllbare Klauselmenge gibt es eine Ableitung der leeren Klausel durch lineare Resolution, aber nicht jede angefangene Ableitung mit linearer Resolution kann zu einem Beweis geschlossen werden. Es kann also Sackgassen in der Beweissuche geben (lineare Resolution ist *nicht beweiskonfluent*). Insbesondere spielt die Wahl der Startklausel dabei eine Rolle; die Wahl einer ungünstigen Startklausel kann in die Sackgasse führen.

(a) Geben Sie für die Klauselmenge

$$\{\{A, D\}, \{\neg A, B\}, \{\neg D, B\}, \{C, A\}, \{C, B\}, \{\neg B\}\}$$

eine Ableitung der leeren Klausel $\square$ mittels linearer Resolution an.

(b) Geben Sie für die Klauselmenge aus (a) einen angefangenen linearen Resolutionsbeweis an, der nicht zur leeren Klausel $\square$ führen kann, also eine Sackgasse darstellt.

Aufgabe 5

Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionskalküls, daß Superman nicht existiert:

> Wenn Superman das Böse verhindern kann und will, wird es tun. Wenn Superman das Böse nicht verhindern kann, dann ist er machtlos; wenn er es nicht will, dann ist er böswillig. Superman (sofern er existiert) verhindert das Böse nicht. Wenn Superman existiert, ist er weder machtlos noch böswillig. Darum existiert Superman nicht.

Aufgabe 6

(a) Seien ϕ und X beliebige Formeln der Aussagenlogik. Beweisen Sie mit dem Hilbertkalkül aus der Vorlesung die Aussage

$$\{\phi, \neg\phi\} \models X \ .$$

Füllen Sie dafür die Lücken im folgenden Beweisschema:

$$\dfrac{\phi, \qquad \dfrac{\dfrac{\ldots, \quad \dfrac{}{\ldots \to (\ldots \to \ldots)}\,(\ldots)}{\ldots \to \ldots}\,(\ldots), \qquad \dfrac{}{(\ldots \to \ldots) \to (\ldots \to \ldots)}\,(\ldots)}{\ldots \to \ldots}\,(\ldots)}{X}\,(\ldots) \quad .$$

(b) Angenommen, für einen Hilbertkalkül R gilt[1]

$$\neg(\phi \to \psi) \vdash_R (\psi \to \phi) \ .$$

Kann R korrekt sein? Kann R vollständig sein?

[1] R ist hier ein Kalkül mit anderen Regeln und/oder Axiomen als der aus der Vorlesung.