

Formale Systeme, WS 2009/2010

Übungsblatt 6

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 11.12.2009 besprochen.

Aufgabe 1

Sei Σ eine prädikatenlogische Signatur mit einem zweistelligen Prädikatensymbol p .

- Geben Sie eine prädikatenlogische Formel F über Σ an, so daß gilt: Eine Interpretation (D, I) ist genau dann Modell von F , wenn die Relation $I(p)$ eine *strikte Halbordnung* (also transitiv und irreflexiv) auf D ist.
- Geben Sie eine erfüllbare prädikatenlogische Formel G über Σ an, so daß gilt: Wenn eine Interpretation (D, I) Modell von G ist, dann ist D unendlich.

Aufgabe 2

Geben Sie für jede der folgenden Formeln an, ob sie erfüllbar, allgemeingültig, unerfüllbar oder keine Formel der Prädikatenlogik erster Stufe ist. Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

- $\exists x(\forall x(\neg f(x) \doteq f(x)))$
- $\forall x(f(x) \doteq c) \rightarrow f(f(f(c))) \doteq c$
- $\forall x(\forall y(p(x) \vee \neg p(y)))$
- $\forall x(p(x) \doteq \mathbf{1} \wedge q(x) \doteq \mathbf{1} \rightarrow p(x) \doteq q(x))$
- $(r \rightarrow (s \rightarrow r)) \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow r)$

Bemerkung: Eine Formel kann mehr als eine der genannten Eigenschaften haben. p, q, r, s sind Prädikatssymbole, f ein Funktionssymbol (mit der richtigen Stelligkeit) und x, y sind Variablen.

Aufgabe 3

Berechnen Sie für die prädikatenlogischen Formeln (a) und (b) jeweils eine (äquivalente) Pränexnormalform und eine (erfüllbarkeitsäquivalente) Skolem-Normalform mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Verfahrens.

- $(\forall x p(x) \rightarrow \forall x q(x)) \rightarrow \forall x(p(x) \rightarrow q(x))$
- $\exists x(\forall y p(x, y) \vee \exists z(p(x, z) \wedge \forall x p(z, x)))$
- Geben Sie eine zweite Skolem-Normalform für (a) an, die sich von Ihrer ersten Lösung durch mehr als Umbenennung und Äquivalenzumformung unterscheidet.

Aufgabe 4

Zu einer prädikatenlogischen Formel G in Pränexnormalform bezeichne G_{sko} die durch Skolemisierung aus G konstruierte Formel in Skolem-Normalform.

- (a) Geben Sie (ohne Beweis) jeweils eine prädikatenlogische Formel G in Pränexnormalform an, so daß Folgendes gilt:
- (i) $\neg G_{\text{sko}} \wedge G$ ist erfüllbar,
 - (ii) $\neg G_{\text{sko}} \wedge G$ ist unerfüllbar,
 - (iii) $G \rightarrow G_{\text{sko}}$ ist nicht allgemeingültig.
- (b) Zeigen Sie, daß $G_{\text{sko}} \rightarrow G$ für alle prädikatenlogischen Formeln G in Pränexnormalform allgemeingültig ist. (Hinweis: Verwenden Sie Lemma 4.36 aus dem Skriptum.)