Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Dr. Vladimir Klebanov

Formale Systeme, WS 2009/2010

Übungsblatt 7

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 08.01.2010 besprochen.

Aufgabe 1

Beweisen Sie jeweils mit Hilfe des Tableau-Kalküls und mit Hilfe des Resolutionskalküls die Allgemeingültigkeit der folgenden Formeln:

(a) $(\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)) \rightarrow \forall x\, (p(x) \vee q(x))$

(b) $\big(p(a) \wedge \forall x\, (p(x) \rightarrow p(f(x)))\big) \rightarrow p(f(f(f(f(a)))))$.

Aufgabe 2

(a) Geben Sie eine prädikatenlogische Formel F an, die folgendes formalisiert:

> Daraus, dass
> - es eine gerade Zahl gibt,
> - wenn x eine gerade Zahl ist, auch das Doppelte von x eine gerade Zahl ist, und
> - eine Zahl genau dann gerade ist, wenn sie nicht ungerade ist,
>
> folgt, daß es eine Zahl x gibt, so daß das Doppelte des Doppelten von x nicht ungerade ist.

Verwenden Sie dabei die Prädikatensymbole g (gerade) und u (ungerade) und das Funktionssymbol d (das Doppelte von).

(b) Transformieren Sie das Negat von F in Skolem-Normalform (mit Matrix in konjunktiver Normalform).

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionskalküls, daß F allgemeingültig ist.

Aufgabe 3

Unter dem *Trinkerparadox von Smullyan* versteht man folgende Aussage: „In einer nichtleeren Bar gibt es stets eine Person P, so daß, falls P etwas trinkt, alle anwesenden Personen etwas trinken.“

(a) Formalisieren Sie diese Aussagen in Prädikatenlogik erster Ordnung.

Hinweis: die Personen in der Bar sollen das Universum der intendierten Interpretation sein; damit ist „nicht leer“ schon erledigt. Außerdem verwende man ein einstelliges Prädikat $t(x)$ für „x trinkt etwas“.

(b) Zeigen Sie durch Argumentation über die Semantik der PL1, daß die in Teilaufgabe (a) formalisierte Aussage A eine allgemeingültige PL1-Formel ist.

(c) Zeigen Sie, daß die Voraussetzung einer „nichtleeren Bar“ wesentlich ist. Nehmen Sie für einen Moment an, daß ein leeres Universum zulässig wäre, und geben Sie dann ein entspr. „Modell“ von $\neg A$ an.

(d) Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit der Aussage A mit Hilfe des Tableaukalküls.