Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Dr. Vladimir Klebanov

Formale Systeme, WS 2009/2010

Übungsblatt 8

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 22.01.2010 besprochen.

Aufgabe 1

Gegeben sei folgende Formel A:

$$\begin{aligned} A \;=\; & [\forall x \forall y (p(x,y) \to q(x,y)) \land \forall x \forall y (r(x,y) \to s(x,y))] \to \\ & \forall x \forall y (\exists z (p(x,z) \land r(z,y)) \to \exists u (q(x,u) \land s(u,y))) \end{aligned}$$

Zeigen Sie die Allgemeingültigkeit der Formel A mithilfe des Tableaukalküls. Sie können dafür das Tableau-Applet auf der Vorlesungshomepage benutzen:
`http://i12www.ira.uka.de/~beckert/Lehre/Formale-Systeme/Tablet/`

Aufgabe 2

In der Abschlussregel des Tableaukalküls (Definition 5.4 im Skriptum) wird gefordert, dass eine schließende Substitution immer auf das gesamte Tableau angewandt werden muss, und nicht etwa nur auf den Pfad, der gerade geschlossen wird.

Geben Sie eine geschlossene[1], *nicht* allgemeingültige PL1-Formel φ und ein zugehöriges Tableau für 0φ an, das (fälschlicher Weise) geschlossen[1] werden könnte, wenn die Abschlusssubstitution nur auf jeweils einen Pfad angewendet werden mÃŒsste.

Aufgabe 3

Häufig ist es geschickt, einen Term in Abhängigkeit von der Auswertung einer Formel zu verwenden. Für Formeln kann dazu der schon bekannte *sh*-Operator verwendet werden, auf Termebene benötigt man **bedingte Terme** (engl. *conditional terms*).

Definition (bedingte Terme) Seien $\phi \in For_\Sigma$ eine Formel und $t_1, t_2 \in Term_\Sigma$ Terme, dann ist

$$(\texttt{if}\ \phi\ \texttt{then}\ t_1\ \texttt{else}\ t_2) \in Term_\Sigma$$

auch ein Term. Die Semantik ist dabei für eine Interpretation (D, I) und eine Variablenbelegung β definiert durch

$$\mathrm{val}_{I,\beta}(\texttt{if}\ \phi\ \texttt{then}\ t_1\ \texttt{else}\ t_2) := \begin{cases} \mathrm{val}_{I,\beta}(t_1) & \text{wenn } \mathrm{val}_{I,\beta}(\phi) = W \\ \mathrm{val}_{I,\beta}(t_2) & \text{wenn } \mathrm{val}_{I,\beta}(\phi) = F \end{cases}$$

(a) Geben Sie für die Formel $(x \doteq \texttt{if}\ \phi\ \texttt{then}\ t_1\ \texttt{else}\ t_2)$ eine logisch äquivalente Formel ohne bedingte Terme an.

(b) Zeigen Sie die Äquivalenz $p(f(c)) \;\leftrightarrow\; \exists x.(x \doteq c \;\land\; p(f(x)))$

(c) Geben Sie in Worten einen Algorithmus an, der für eine Formel der erweiterten Syntax eine logisch äquivalente Formel ohne bedingte Terme berechnet.

[1]Beachten Sie: Das Wort „geschlossen“ hat hier zwei unterschiedliche Bedeutungen. Eine Formel ist geschlossen, wenn sie keine freien Variablen enthält. Ein Tableau ist geschlossen, wenn jeder seiner Äste einen Widerspruch $1\psi, 0\psi$ enthält.