Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Dr. Vladimir Klebanov

# Formale Systeme, WS 2009/2010

## Übungsblatt 9

**Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 22.01.2010 besprochen.**

### Aufgabe 1

Gegeben sei die Relation $\succ = \{(a,b),(b,d),(c,b),(d,a),(d,e)\}$.

(a) Bestimmen Sie $\rightarrow$, $\xrightarrow{+}$, und $\leftrightarrow$.

(b) Zeigen Sie, daß $\succ$ lokal konfluent sowie konfluent ist.

(c) Erweitern Sie die Relation $\succ$ um ein Tupel, so daß sie zwar lokal konfluent bleibt, aber nicht mehr konfluent ist.

### Aufgabe 2

Seien $N := \mathbb{N} \setminus \{1,0\}$ und $N' := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ Teilmengen der natürlichen Zahlen. Die Relation $\succ \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist definiert als

$$a \succ b \quad :\Longleftrightarrow \quad b \text{ teilt } a \text{ und } a \neq b \qquad (a, b \in \mathbb{N}).$$

Betrachten Sie nun die Reduktionssysteme $(N, \succ)$ und $(N', \succ)$:

| | | |
|---|---|---|
| (a) | Ist $(N, \succ)$ lokal konfluent? | Ist $(N', \succ)$ lokal konfluent? |
| (b) | Ist $(N, \succ)$ konfluent? | Ist $(N', \succ)$ konfluent? |
| (c) | Ist $(N, \succ)$ noethersch? | Ist $(N', \succ)$ noethersch? |
| (d) | Besitzt $(N, \succ)$ irreduzible Elemente? Wenn ja, welche? | Besitzt $(N, \succ)$ irreduzible Elemente? Wenn ja, welche? |

Begründen Sie Ihre Antworten kurz.
*Bemerkung:* Mit $\succ$ ist jeweils die Einschränkung auf $N \times N$ bzw. $N' \times N'$ gemeint.

### Aufgabe 3

Die Ackermann-Funktion ist eine rekursive Funktion, die für ihr außergewöhnlich schnelles Wachstum bekannt ist. Man könnte sie so programmieren:

```
nat A(nat x, nat y) {
   if (x==0) return y+1;
   else if (y==0) return A(x-1,1);
      else return A(x-1, A(x,y-1));
}
```

Zeigen Sie mit Noetherscher Induktion, daß die Ackermann-Funktion für alle Eingaben terminiert.

**Aufgabe 4**

Gegeben sei die prädikatenlogische Signatur $\Sigma = (\{\}, \{E\}, \alpha)$ mit $\alpha(E) = 2$. Jedes Modell $(V, I)$ zu dieser Signatur kann als gerichteter Graph $(V, I(E))$ aufgefasst werden. Das Universum $V$ ist dabei die Menge der Knoten und das Prädikat $I(E)$ die Menge der Kanten.

(a) Geben Sie eine Formel $\phi(x, y)$ der Prädikatenlogik 2. Stufe (PL2) an, so daß $val_{V,I,\beta}(\phi(x, y)) = W$ gdw. es im Graphen $(V, I(E))$ einen Weg von $\beta(x)$ nach $\beta(y)$ gibt.

(b) Zeigen Sie, daß die Klasse aller zusammenhängender Graphen PL2-definierbar ist.