Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Dr. des. Vladimir Klebanov

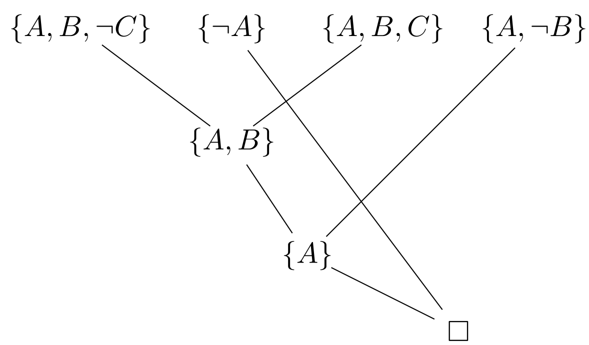
Formale Systeme, WS 2009/2010

Lösungen zum Übungsblatt 2

Dieses Blatt wurde in der Übung am 13.11.2009 besprochen.

Zu Aufgabe 1

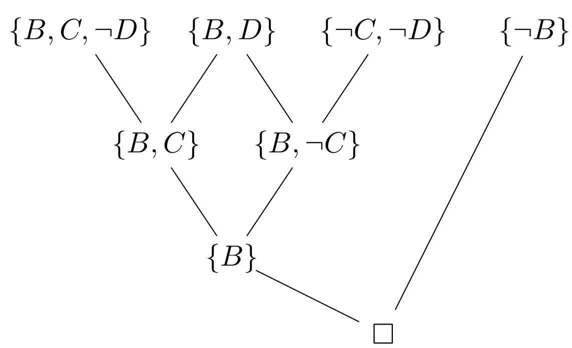
(a) 1. Schritt: Resolution



(b) 1. Schritt: Formel negieren

$$(B \lor C \lor \neg D) \land (B \lor D) \land (\neg C \lor \neg D) \land \neg B$$

2. Schritt: Klauselschreibweise und Resolution



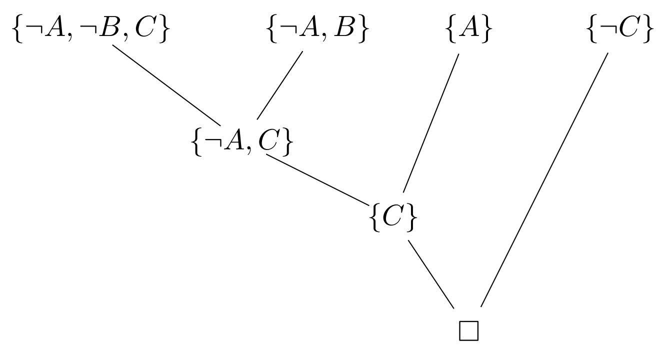
(c) <u>1. Schritt:</u> Formel negieren

$$\neg((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$$

<u>2. Schritt:</u> In KNF transformieren

$$\begin{aligned}
&\neg((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))) \equiv \\
&(A \to (B \to C)) \wedge \neg((A \to B) \to (A \to C)) \equiv \\
&(A \to (B \to C)) \wedge ((A \to B) \wedge \neg(A \to C)) \equiv \\
&(\neg A \vee (B \to C)) \wedge ((\neg A \vee B) \wedge (A \wedge \neg C)) \equiv \\
&(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B) \wedge A \wedge \neg C
\end{aligned}$$

<u>3. Schritt:</u> Klauselschreibweise und Resolution



Zu Aufgabe 2

(a) Die Formel $(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B) \wedge \neg B$ ist nicht Horn (da die erste Disjunktion mehr als ein positives Literal hat).

Allerdings gehört diese Formel zu der sog. Formelklasse *Renamable Horn*. Das sind solche Formeln, die man in eine Hornformel transformieren kann, indem man für eine, mehrere oder auch alle der aussagenlogischen Variablen X in der Klausel (zugleich) alle positiven Vorkommen von X durch $\neg X$ ersetzt und alle negativen Vorkommen $\neg X$ durch X. Die Erfüllbarkeit der Formel bleibt dabei erhalten (evtl. Modelle der neuen und der alten Formel sind „Spiegelbilder“ voneinander). Die Erfüllbarkeit der neuen Hornformel und damit auch die Erfüllbarkeit der alten Forme) kann dann mit dem üblichen Markierungsalgorithmus getestet werden.

Vertauscht man in diesem Beispiel die Polarität aller Literale, so erhält man eine Hornformel:

$$(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (A \vee \neg B) \wedge B \ .$$

Implikationsschreibweise:

$$\begin{aligned}
&A \wedge B \wedge C \to 0 \\
&A \to C \\
&B \to A \\
&\to B
\end{aligned}$$

Die umbenannte Formel ist unerfüllbar, somit hat auch die ursprüngliche Formel kein Modell.

(b) Die Formel $(S \vee \neg P \vee Q) \wedge (S \vee \neg P \vee \neg R) \wedge \neg S \wedge P$ ist nicht Horn. Man könnte ausnutzen, dass sie Renamable Horn ist. Es gibt aber auch noch eie andere Möglichkeit: Diese Formel ist „fast“ Horn. In solchen Fällen ist es möglich, eine Fallunterscheidung über die Belegungen der „störenden“ Literale vorzunehmen und die Erfüllbarkeit der verbleibenden Hornformeln mit dem Markierungsalgorithmus zu entscheiden.

Das störende Literal ist Q. Setzen wir zuerst $I(Q) = F$, erhalten wir die Formel:

$$\begin{array}{l} P \to S \\ (P \wedge R) \to S \\ S \to 0 \\ \to P \end{array}$$

Diese ist unerfüllbar. Setzen wir nun $I(Q) = W$, so entfällt die erste Teilformel, und die Formel wird erfüllbar. Das Gesamtmodell lautet also: $I(P) = W$, $I(Q) = W$, $I(R) = F$, $I(S) = F$.

(c) Die Formel $A \vee \neg A$ ist Horn und erfüllbar. Implikationsschreibweise:

$$A \to A$$

Modell: $I(A) = F$.

(d) Die Formel $A \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee D) \wedge \neg E \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge D$ ist Horn und erfüllbar. Implikationsschreibweise:

$$\begin{array}{l} \to A \\ A \to B \\ B \wedge C \to D \\ E \to 0 \\ A \wedge C \to 0 \\ \to D \end{array}$$

Modell: $I(A) = W$, $I(B) = W$, $I(C) = F$, $I(D) = W$, $I(E) = F$.

Zu Aufgabe 3

(a) Betrachten wir die Klauselmenge $\{\{P, Q\}, \{\neg P, \neg Q\}\}$, die z.B. durch die Interpretation I mit $I(P) = W$ und $I(Q) = F$ erfüllt wird, also nicht unerfüllbar ist.

Die „Doppelresolution“ würde jedoch in einem Schritt die leere Klausel $\square$ ableiten. Widerspruch zur Erfüllbarkeit!

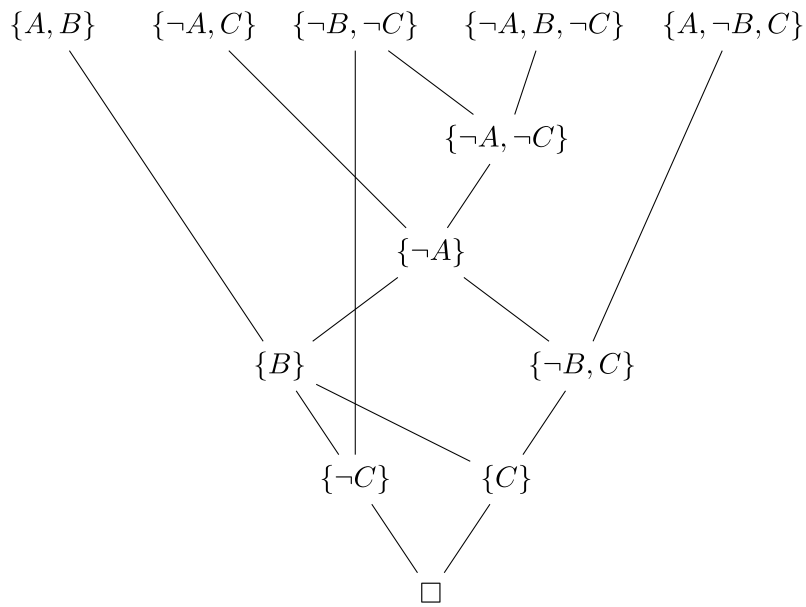
(b) Diese Variante des Resolutionskalküls ist *nicht* vollständig, d.h., es gibt unerfüllbare Klauselmengen, aus denen nicht die leere Klausel abgeleitet werden kann.

Behauptung Die Klauselmenge

$$\{A, B\}, \{\neg A, C\}, \{\neg B, \neg C\}, \{\neg A, B, \neg C\}, \{A, \neg B, C\}$$

ist unerfüllbar, es gibt aber keine Resolutionsableitung, in der jede Klausel höchstens ein Mal benutzt wird.

Unerfüllbarkeit Folgender Resolutionsbeweis zeigt die Unerfüllbarkeit der Menge:



Zu zeigen: Es gibt keine Ableitung der leeren Klausel ohne mindestens eins Klausel mehrmals zu verwenden.

Folgendes ist dafür zu beobachten:

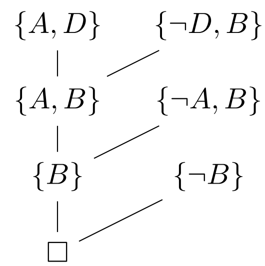
(i) Bei jedem Resolutionsschritt nimmt die Anzahl der zur Verfügung stehenden Klauseln um genau eins ab.

(ii) Die leere Klausel kann in einem Schritt nur aus zwei Einerklauseln abgeleitet werden.

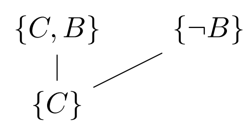
Wegen Punkt (i) kann bei fünf Ausgangsklauseln ein Beweis nur maximal *vier* Schritte umfassen, wobei nach dem vierten Schritt die leere Klausel entstehen muss. Wegen Punkt (ii) muss also wenigstens eine Einerklausel in einem Schritt (die andere dann in höchstens zwei) Schritten aus der Ausgangsmenge herleitbar sein. Resolviert man aber je zwei Klauseln aus der Menge, so stellt man fest, dass nie eine Einerklausel in einem Schritt herleitbar ist. Es gibt also keinen solchen Beweis.

Zu Aufgabe 4

(a) Es gibt mehrere Möglichkeiten, einen linearen Beweis zu führen. Eine ist:



(b) Auch hier gibt es mehrere Möglichkeiten. Wie in der Aufgabenstellung erwähnt, ist die Wahl der Startklausel von Bedeutung sein. Wählt man dafür z. B. $\{C, B\}$ aus, so gerät man in eine Sackgasse, man hat keine Möglichkeit, das Literal C loszubekommen, was daran liegt, dass C kein „Gegenstück“ in der Klauselmenge besitzt (solch ein Literal nennt man „pur“).

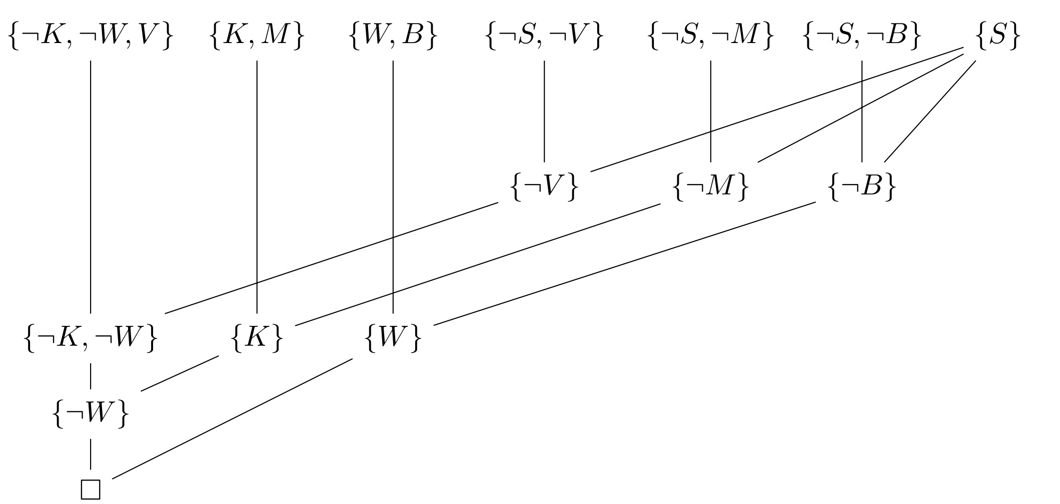


Zu Aufgabe 5

Formalisierung.

Wenn Superman das Böse verhindern kann und will, wird es tun.	$K \wedge W \to V$
Wenn Superman das Böse nicht verhindern kann, dann ist er machtlos.	$\neg K \to M$
Wenn er es nicht will, dann ist er böswillig.	$\neg W \to B$
Superman (sofern er existiert) verhindert das Böse nicht.	$S \to \neg V$
Wenn Superman existiert, ist er weder machtlos noch böswillig.	$S \to (\neg M \wedge \neg B)$
Superman existiert.	S

Beweis. Wir zeigen die Widersprüchlichkeit dieser Aussagen durch Ableitung einer leeren Klausel mit Resolution (vorher übersetzen wir die Formeln natürlich in Klauselform).



Zu Aufgabe 6

(a) Ableitung:

$$\cfrac{\phi, \quad \cfrac{\cfrac{\neg\phi, \quad \cfrac{}{\neg\phi \to (\neg X \to \neg\phi)}\,(ax1)}{\neg X \to \neg\phi}\,(mp), \quad \cfrac{}{(\neg X \to \neg\phi) \to (\phi \to X)}\,(ax3)}{\phi \to X}\,(mp)}{X}\,(mp) \quad .$$

Damit gilt $\{\phi, \neg\phi\} \vdash X$ und wegen der Korrektheit des Hilbertkalküls $\{\phi, \neg\phi\} \models X$.

(b) R kann korrekt sein.

$$\neg(\phi \to \psi) \models (\psi \to \phi)$$

gilt bzw. $\neg(\phi \to \psi) \to (\psi \to \phi)$ ist allgemeingültig. Daher stellt diese Ableitung keine Verletzung der Korrektheit dar.

R kann vollständig sein. Denn dass etwas ableitbar sein soll, widerspricht der Vollßtandigkeit des Kalküls keinesfalls.

Anmerkung: Die Frage war nur, ob der Kalkül korrekt bzw. vollständig sein *kann*. Diese Frage haben wir jeweils mit bejaht. Daraus folgt aber nicht, dass der Kalkül auch tatsächlich korrekt und vollständig ist. Der Standard-Hilbertkalkül H0 aus der Vorlesung hat diese Eigenschaften. Aber da wir in dieser Aufgabe gerade nicht voraussetzen, dass $R = H0$, wissen wir nicht genug über R, um mit Bestimmtheit zu sagen, dass R korrekt bzw. vollständig ist.