Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Dr. Vladimir Klebanov

Formale Systeme, WS 2009/2010

Lösungen zum Übungsblatt 5

Dieses Blatt wurde in der Übung am 11.12.2009 besprochen.

Zu Aufgabe 1

(a) (i) Nicht kollisionsfrei, da
- x kommt in $\sigma(y)$ vor.
- y kommt im Wirkungsbereich des Quantors $\forall x$ vor.

(ii) Kollisionsfrei, das zweite Auftreten von x (dort gebundene Variable!) wird nicht ersetzt.

$$\sigma(F) = \exists y(p(y, f(g(x), c)) \vee \forall x \exists z(f(z, c) \doteq f(c, x)))$$

(iii) Kollisionsfrei (das zweite Vorkommen von y wird nicht ersetzt)

$$\sigma(F) = p(x, g(x)) \to \forall x(q(f(x, g(y))) \vee \exists y(q(f(x, y))))$$

(b) (i) unifizierbar. Robinson ergibt:

$\mu_0 = id$	$\mu(F) = q(f(f(\boxed{x}, y), x))$	$\mu_0(G) = q(f(f(\boxed{g(c)}, z), g(z)))$
$\mu_1 = \{x/g(c)\}$	$\mu_1(F) = q(f(f(g(c), \boxed{y}), g(c)))$	$\mu_1(G) = q(f(f(g(c), \boxed{z}), g(z)))$
$\mu_2 = \{x/g(c), y/z\}$	$\mu_2(F) = q(f(f(g(c), z), g(\boxed{c})))$	$\mu_1(G) = q(f(f(g(c), z), g(\boxed{z})))$
$\mu_3 = \{x/g(c), y/c, z/c\}$	$\mu_3(F) = \mu_3(G) = q(f(f(g(c), c), g(c)))$	

Man muss beachten, dass man weitere Ersetzungen nicht einfach zur Menge hinzunehmen kann, sondern auch auf die darin enthaltenen Terme anwenden muss.
Beispielsweise: $\mu_3 = \{x/\boldsymbol{z}, y/g(c)\} \circ \{z/\boldsymbol{c}\} = \{x/\boldsymbol{c}, y/g(c), z/c\}$

(ii) Im ersten Schritt des Robinsonalgorithmus erhält man:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \{x/f(y)\} \\ \mu_1(F) &= p(f(y), y) \\ \mu_1(G) &= p(f(y), f(f(y))) \end{aligned}$$

Nun aber muss der Algorithmus abbrechen, weil $D(\{\mu(F), \mu(G)\}) = \{y, f(f(y))\}$ und die sind nicht unifizierbar, weil y eine Variable ist und in $f(f(y))$ auftritt.

(iii) unifizierbar. Der Robinsonalgorithmus mit Zwischenergebnissen:

$\mu_0 = id$	$\mu_0(F) = p(\boxed{x}, f(y, x))$	$\mu_0(G) = p(\boxed{f(y, c)}, f(g(z), f(g(z), c)))$
$\mu_1 = \{x/f(y, c)\}$	$\mu_1(F) = p(f(y, c), f(\boxed{y}, x))$	$\mu_2(G) = p(f(y, c), f(\boxed{g(z)}, f(g(z), c)))$
$\mu_2 = \{x/f(g(z), c), y/g(z)\}$	$\mu_2(F) = \mu_2(G) = p(f(g(z), c), f(g(z), f(g(z), c)))$	

Zu Aufgabe 2

(a) $\theta = \{x/a, y/x\}$, $\sigma = \{v/f(u), u/z\}$
$\sigma \circ \theta = \{x/a, y/x, v/f(u), u/z\}$

(b) $\theta = \{v/h(x,y), w/b, s/y\}$, $\sigma = \{x/d, y/d, r/f(v)\}$
$\sigma \circ \theta = \{v/h(d,d), w/b, s/d, x/d, y/d, r/f(v)\}$

(c) $\theta = \{u/g(y,x), v/y, w/y\}$, $\sigma = \{u/d, x/b, y/f(v)\}$
$\sigma \circ \theta = \{u/g(f(v),b), v/f(v), w/f(v), x/b, y/f(v)\}$

(d) $\theta = \{x/y, y/v\}$, $\sigma = \{x/a, y/b, v/u\}$
$\sigma \circ \theta = \{x/b, y/u, v/u\}$

Zu Aufgabe 3

(a) Gegeben sind:

$$\mu_1 = \{x/y, r/y, u/y, v/f(z)\}$$
$$\mu_2 = \{r/x, y/x, u/x, v/f(x), z/x\}$$
$$\mu_3 = \{x/a, y/a, z/b, u/a, v/f(b), r/a\}$$

Es ist klar, daß für $i = 1, 2, 3$ gilt $\mu_i \geqslant \mu_i$ (siehe auch nächste Teilaufgabe). Für alle anderen Paare:

- $\mu_1 \geqslant \mu_2$ mit Substitution $\{y/x, z/x\}$
- $\mu_1 \geqslant \mu_3$ mit Substitution $\{y/a, z/b\}$
- $\mu_2 \not\geqslant \mu_3$, da die Substitution x/a und x/b gleichzeitig substituieren müßte
- $\mu_2 \not\geqslant \mu_1$, da die Substitution x/y und x/z gleichzeitig substituieren müßte
- $\mu_3 \not\geqslant \mu_1$, da die Substitution x/a und x/y gleichzeitig substituieren müßte
- $\mu_3 \not\geqslant \mu_2$, da die Substitution r/a und r/x gleichzeitig substituieren müßte

(b) (i) Reflexivität: Es ist klar, daß $id \circ \theta = \theta$, also $\theta \geqslant \theta$ für alle θ.

(ii) Transitivität: $\theta \geqslant \sigma$ und $\sigma \geqslant \mu$ bedeutet die Existenz von σ_1, σ_2 so, daß $\sigma_1 \circ \theta = \sigma$ und $\sigma_2 \circ \sigma = \mu$. Nun gilt $(\sigma_2 \circ \sigma_1) \circ \theta = \sigma_2 \circ (\sigma_1 \circ \theta) = \sigma_2 \circ \sigma = \mu$. Die erste Gleichheit ergibt sich aus der Assoziativität, die anderen beiden aus der o.g. Existenzaussage. Damit haben wir bewiesen, daß eine Substitution existiert (nämlich $\sigma_2 \circ \sigma_1$), mit der $\theta \geqslant \mu$ für alle θ, σ, μ.

(iii) Keine Antisymmetrie: Sei $\theta = \{x/y\}$ und $\sigma = \{y/x\}$, offensichtlich $\theta \neq \sigma$. Allerdings gilt $\sigma \circ \theta = \sigma$ und damit $\theta \geqslant \sigma$. Analog gilt $\sigma \geqslant \theta$. Gegenbeispiel.[1]

[1] In einer früheren Version der Musterlösung hieß es, die Substitutionen $\{x/y\}$ und $\{x/z\}$ seien ein Gegenbeispiel. Das stimmt aber nicht. Man beachte: $\{y/z\} \circ \{x/y\} = \{x/z, y/z\} \neq \{x/z\}$.