Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Dr. Vladimir Klebanov

Formale Systeme, WS 2009/2010

Lösungen zum Übungsblatt 7

Dieses Blatt wurde in der Übung am 08.01. / 22.01.2010 besprochen.

Zu Aufgabe 1

(a) Abbildung 1 zeigt ein geschlossenes Tableau für die Anfangsmarkierung

$$0\,(\forall x p(x) \vee \forall x q(x)) \rightarrow \forall x (p(x) \vee q(x)) \ .$$

Das Negat der Formel ist also unerfüllar, die Formel selbst also allgemeingültig.

Vorbereitung der Resolution:

$$\begin{aligned}
&\neg(\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)) \rightarrow \forall x\, (p(x) \vee q(x)) \equiv \\
&(\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)) \wedge \exists x\, (\neg p(x) \wedge \neg q(x)) \overset{\circ}{\equiv} \\
&(\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)) \wedge \neg p(sk_0) \wedge \neg q(sk_0) \equiv \\
&\forall x_1 \forall x_2\, (p(x_1) \vee q(x_2)) \wedge \neg p(sk_0) \wedge \neg q(sk_0)
\end{aligned}$$

Ableitung:

(1)	$\{p(x_1), q(x_2)\}$	
(2)	$\{\neg p(sk_0)\}$	
(3)	$\{\neg q(sk_0)\}$	
(4)	$\{p(x_3)\}$	$[1, 3, \mu = \{x_2/sk_0\}]$
(5)	$\Box$	$[4, 2, \mu = \{x_3/sk_0\}]$

(b) Abbildung 2 zeigt ein geschlossenes Tableau für die Anfangsmarkierung

$$1\, p(a)$$

$$1\, \forall x\, (p(x) \rightarrow p(f(x)))$$

$$0\, p(f(f(f(f(a))))) \ .$$

entsprechend dem Negat der ursprünglichen Formel. Dieses ist demnach unerfüllar, und die Formel selbst also allgemeingültig.

Vorebereitung der Resolution:

$$\begin{aligned}
&\neg\big((p(a) \wedge \forall x\, (p(x) \rightarrow p(f(x)))) \rightarrow p(f(f(f(f(a)))))\big) \equiv \\
&p(a) \wedge \forall x\, (\neg p(x) \vee p(f(x))) \wedge \neg p(f(f(f(f(a))))) \equiv \\
&\forall x\, (p(a) \wedge (\neg p(x) \vee p(f(x)) \wedge \neg p(f(f(f(f(a))))))
\end{aligned}$$

Ableitung:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \{p(a)\} & \\
(2) & \{\neg p(x), p(f(x))\} & \\
(3) & \{\neg p(f(f(f(f(a)))))\} & \\
(4) & \{\neg p(f(f(f(a))))\} & [3, 2, \mu = \{x/f(f(f(a)))\}] \\
(5) & \{\neg p(f(f(a)))\} & [4, 2, \mu = \{x/f(f(a))\}] \\
(6) & \{\neg p(f(a))\} & [5, 2, \mu = \{x/f(a)\}] \\
(7) & \{\neg p(a)\} & [6, 2, \mu = \{x/a\}] \\
(8) & \square & [7, 1, \mu = \{\}]
\end{array}
$$

Oder kürzer durch Selbstresolution:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \{p(a)\} & \\
(2) & \{\neg p(x), p(f(x))\} & \\
(3) & \{\neg p(f(f(f(f(a)))))\} & \\
(4) & \{\neg p(y), p(f(f(y)))\} & [2, 2, \mu = \{x/f(y)\}] \\
(5) & \{\neg p(z), p(f(f(f(f(z)))))\} & [4, 4, \mu = \{y/f(f(z))\}] \\
(6) & \{\neg p(a)\} & [3, 5, \mu = \{z/a\}] \\
(7) & \square & [1, 6, \mu = \{\}]
\end{array}
$$

Zu Aufgabe 2

(a) Formalisierung über der angegebenen Signatur:

- $\exists x \; g(x)$
- $\forall x \; (g(x) \to g(d(x)))$
- $\forall x \; (g(x) \leftrightarrow \neg u(x))$

Beh.: $\exists x \; \neg u(d(d(x)))$

(b) Transformation der Negation in Skolemnormalform:

KNF: $\exists x \; g(x) \land \forall x \; (\neg g(x) \lor g(d(x))) \land \forall x \; \big((g(x) \lor u(x)) \land (\neg g(x) \lor \neg u(x))\big) \land \neg\exists x \; \neg u(d(d(x)))$

Pränex: $\exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \big(g(x_1) \land (\neg g(x_2) \lor g(d(x_2))) \land (g(x_3) \lor u(x_3)) \land (\neg g(x_3) \lor \neg u(x_3))\big) \land u(d(d(x_4)))$

Skolem: $\forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \big(g(c) \land (\neg g(x_2) \lor g(d(x_2))) \land (g(x_3) \lor u(x_3)) \land (\neg g(x_3) \lor \neg u(x_3)) \land u(d(d(x_4)))\big)$

(c) Resolution: Nummeriere die Klauseln (1) bis (5), bennene ggf. Variablen um.

$$
\begin{array}{llll}
(1) & \{g(c)\} & & \\
(2) & \{\neg g(x_2), g(d(x_2))\} & & \\
(3) & \{g(x_3), u(x_3)\} & & \\
(4) & \{\neg g(x_4), \neg u(x_4)\} & & \\
(5) & \{u(d(d(x_5)))\} & & \\
(6) & \{g(d(c))\} & [1, 2] & \mu = \{x_2/c\} \\
(7) & \{g(d(d(c)))\} & [6, 2] & \mu = \{x_2/d(c)\} \\
(8) & \{\neg u(d(d(c)))\} & [6, 4] & \mu = \{x_4/d(d(c))\} \\
(9) & \square & [8, 5] & \mu = \{x_5/c\}
\end{array}
$$

$$0\,(\forall x\,p(x) \vee \forall x\,q(x)) \rightarrow \forall x\,(p(x) \vee q(x))\ {}_{1}$$

$$1\,(\forall x\,p(x) \vee \forall x\,q(x))\ {}_{2[\alpha(1)]}$$

$$0\,\forall x\,(p(x) \vee q(x))\ {}_{3[\alpha(1)]}$$

$$0\,(p(sk_1) \vee q(sk_1))\ {}_{4[\delta(3)]}$$

$$0\,p(sk_1)\ {}_{5[\alpha(4)]}$$

$$0\,q(sk_1)\ {}_{6[\alpha(4)]}$$

$$1\,\forall x\,p(x)\ {}_{7[\beta(2)]} \qquad\qquad 1\,\forall x\,q(x)\ {}_{8[\beta(2)]}$$

$$1\,p(X_2)\ {}_{10[\gamma(7)]} \qquad\qquad 1\,q(X_1)\ {}_{9[\gamma(8)]}$$

$$\square_{[10,5,\sigma=\{X_2/sk_1\}]} \qquad\qquad \square_{[9,6,\sigma=\{X_1/sk_1\}]}$$

Abbildung 1: Tableau zu Aufgabe 1(a)

- $1\, p(a)$ $_{1}$
- $1\, \forall x\, (p(x) \rightarrow p(f(x)))$ $_{2}$
- $0\, p(f(f(f(f(a)))))$ $_{3}$
- $1\, p(X) \rightarrow p(f(X))$ $_{4[\gamma(2)]}$
  - $0\, p(X)$ $_{5[\beta(4)]}$
    - $\square_{[5,1,\sigma = \{X/a\}]}$
  - $1\, p(f(X))$ $_{6[\beta(4)]}$
    - $1\, p(X_1) \rightarrow p(f(X_1))$ $_{7[\gamma(2)]}$
      - $0\, p(X_1)$ $_{8[\beta(7)]}$
        - $\square_{[8,6,\sigma = \{X_1/f(a)\}]}$
      - $1\, p(f(X_1))$ $_{9[\beta(7)]}$
        - $1\, p(X_2) \rightarrow p(f(X_2))$ $_{10[\gamma(2)]}$
          - $0\, p(X_2)$ $_{11[\beta(10)]}$
            - $\square_{[11,9,\sigma = \{X_2/f(f(a))\}]}$
          - $1\, p(f(X_2))$ $_{12[\beta(10)]}$
            - $1\, p(X_3) \rightarrow p(f(X_3))$ $_{13[\gamma(2)]}$
              - $0\, p(X_3)$ $_{14[\beta(13)]}$
                - $\square_{[14,12,\sigma = \{X_3/f(f(f(a)))\}]}$
              - $1\, p(f(X_3))$ $_{15[\beta(13)]}$
                - $\square_{[15,3]}$

Abbildung 2: Tableau zu Aufgabe 1(b)

Zu Aufgabe 3

(a) Formalisierung in PL1:

$$A := \exists x(t(x) \rightarrow \forall y(t(y)))$$

(b) Es soll mit Hilfe der Semantikdefinition der PL1 gefolgert werden, dass die in Teilaufgabe (a) formalisierte Aussage A eine allgemeingültige PL1-Formel ist.

Es ist zu zeigen: Für beliebiges $\mathcal{D} = (D, I), \beta$ gilt:

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\exists x(t(x) \rightarrow \forall y(t(y)))) = W$$

gdw. es existiert $d \in D$ mit $val_{\mathcal{D},\beta_x^d}(t(x) \rightarrow \forall y(t(y))) = W$
gdw. es existiert $d \in D$ mit $val_{\mathcal{D},\beta_x^d}(t(x)) = F$ oder $val_{\mathcal{D},\beta_x^d}(\forall y(t(y))) = W$
gdw. es existiert $d \in D$ mit $val_{\mathcal{D},\beta_x^d}(t(x)) = F$ oder $val_{\mathcal{D},\beta}(\forall y(t(y))) = W$
gdw. es existiert $d \in D$ mit $d \notin I(t)$ oder für alle $d \in D$ gilt $d \in I(t)$
gdw. $I(t) \subsetneq D$ oder $I(t) = D$

Die letzte Aussage sagt über die Menge $I(t)$ der durch t zu wahr interpretierten Objekte aus: Entweder es gibt ein Element d aus D außerhalb von $I(t)$ oder alle Elemente $d \in D$ liegen in $I(t)$. Offensichtlich ist dies eine allgemeingültige Aussage, wenn D nicht leer ist.

(c) Wir haben bisher bei der Definition der Semantik der PL1 immer gefordert, dass das Universum (die Objektmenge D) nicht leer sein darf. Man kann die Definition unter gewissen Bedingungen verallgemeinern und auch Interpretationen mit leerem D in Betracht ziehen.

Die Definition der Semantik von $\exists$ besagt:

$$val_{D,I,\beta}(\exists x \varphi) := \begin{cases} W \text{ falls ein } d \in D \text{ existiert mit } val_{D,I,\beta_x^d}(\varphi) = W \\ F \text{ sonst} \end{cases}$$

Daher gilt für jedes $\mathcal{D} = (\emptyset, I)$ und jede Formel φ:

$$\mathcal{D} \models \neg \exists x\ \varphi$$

insbesondere auch $\mathcal{D} \models \neg A$.

(d) Das folgende nicht-verzweigende Tableau ist mit der Substitution $\{X/c\}$ geschlossen:

$0\exists x(t(x) \rightarrow \forall y(t(y)))$
$0(t(X) \rightarrow \forall y(t(y)))$
$1t(X)$
$0\forall y(t(y))$
$0t(c)$