Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Dr. Vladimir Klebanov

Formale Systeme, WS 2009/2010

Lösungen zum Übungsblatt 8

Dieses Blatt wurde in der Übung am 22.01.2010 besprochen.

Zu Aufgabe 1

Abbildung 1 zeigt ein Tableau für $\neg A$. Es handelt sich dabei um einen Ausdruck aus dem Applet der Vorlesungsseite. Die Knoten sind nach folgendem Schema farbkodiert:

grün	α-Formeln
violett	β-Formeln
hellblau	γ-Formeln
gelb	δ-Formeln
magenta	Doppelnegationsformeln (kommen hier nicht vor)

Mit dem Applet werden Tableaux ohne Vorzeichen erstellt, das Vorgehen ist aber offensichtlich und die Vorzeichen könnten leicht hinzugefügt werden.

Das Tableau aus Abb. 1 ist noch nicht geschlossen (damit die freien Variablen sichtbar bleiben). Durch die Substitution

$$\mu = \{X_1/sk_1, X_2/sk_3, X_3/sk_3, X_4/sk_3, X_5/sk_2\}$$

kann es aber geschlossen werden.

Zu Aufgabe 2

Sei $\phi = (\forall x(p(x) \lor q(x))) \to (p(a) \lor q(b))$. Tableau für $\neg\phi$:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 0\phi & & (0) \\
 & & | & & \\
 & & 1\forall x(p(x) \lor q(x)) & & (1)\ [\alpha(0)] \\
 & & | & & \\
 & & 0(p(a) \lor q(b)) & & (2)\ [\alpha(0)] \\
 & & | & & \\
 & & 0p(a) & & (3)\ [\alpha(2)] \\
 & & | & & \\
 & & 0q(b) & & (4)\ [\alpha(2)] \\
 & & | & & \\
 & & 1p(X) \lor q(X) & & (5)\ [\gamma(1)] \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
(6)\ [\beta(5)] & 1p(X) & & 1q(X) & (7)\ [\beta(5)]
\end{array}
$$

Der linke Ast kann nun durch die Substitution X/a geschlossen werden. Wird diese nur lokal (d.h. auf dem Ast) angewendet, kann der rechte Ast durch X/b geschlossen werden.

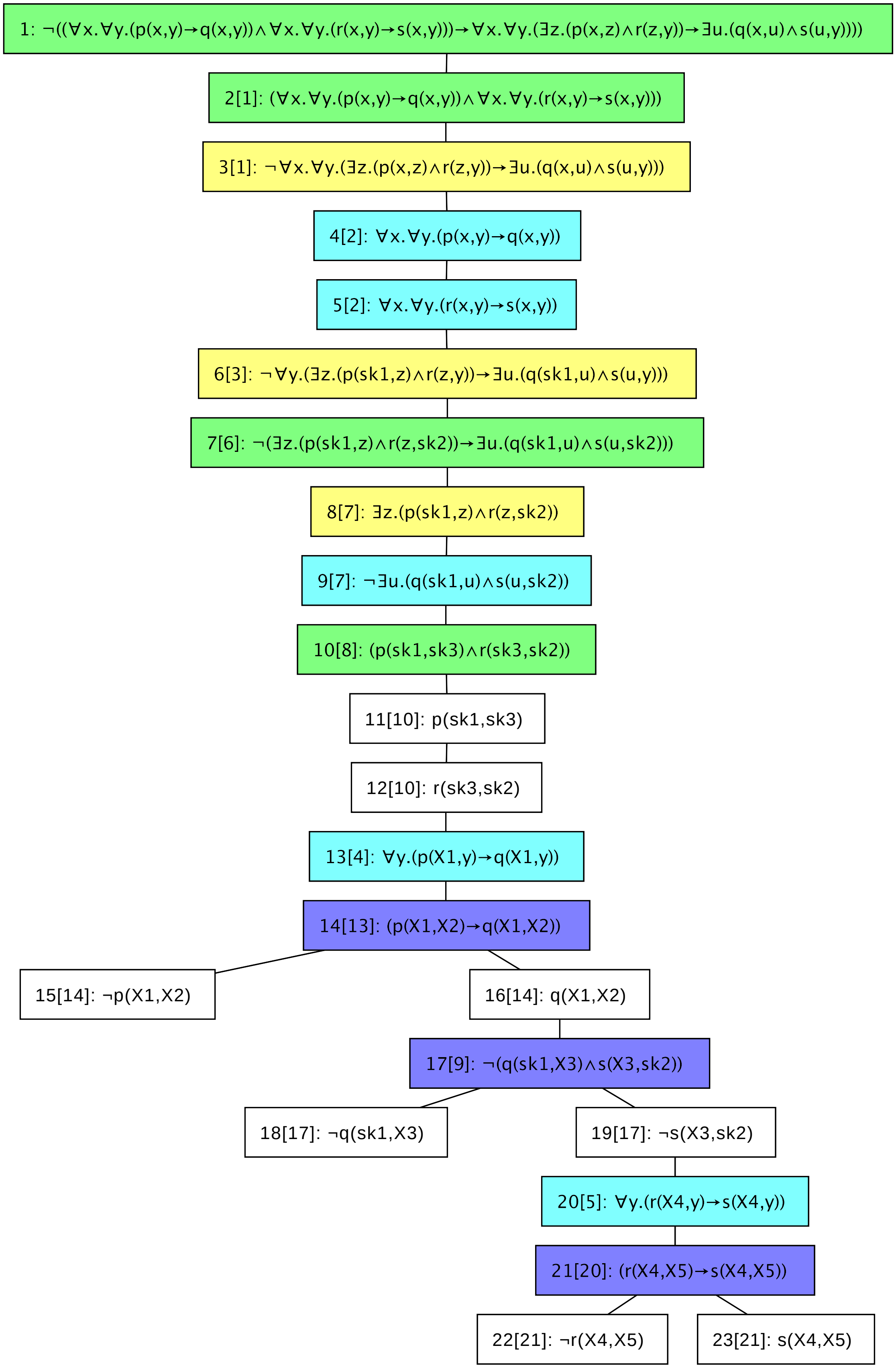

Abbildung 1: Tableau zu Aufgabe 1

Die Formel ϕ ist aber nicht allgemeingültig, wie folgende (Herbrand-)Interpretation (D, I) beweist:

$$\begin{array}{rcl} D & = & \{a, b\} \\ I(p) & = & \{b\} \\ I(q) & = & \{a\} \end{array}$$

Es gilt $\text{val}_I(\forall x(p(x) \vee q(x))) = W$ aber $\text{val}_I(p(a)) = F$ und $\text{val}_I(q(b)) = F$.

Zu Aufgabe 3

(a) $x \doteq \texttt{if}\ \phi\ \texttt{then}\ t_1\ \texttt{else}\ t_2\ \equiv\ (\phi \to x \doteq t_1) \wedge (\neg\phi \to x \doteq t_2) \equiv (\phi \wedge x \doteq t_1) \vee (\neg\phi \wedge x \doteq t_2)$

(b) Sei (D, I) eine beliebige PL-Interpretation.
$\text{val}_{I,\beta}(\exists x.(x \doteq c\ \wedge\ p(f(x)))) = W$
gdw. es gibt ein $d \in D$ mit $\text{val}_{I,\beta_x^d}(x \doteq c\ \wedge\ p(f(x))) = W$
gdw. es gibt ein $d \in D$ mit $\text{val}_{I,\beta_x^d}(x) = \text{val}_{I,\beta_x^d}(c)$ und $\text{val}_{I,\beta_x^d}(f(x)) \in I(p)$
gdw. es gibt ein $d \in D$ mit $d = I(c)$ und $I(f)(d) \in I(p)$
gdw. $I(f)(I(c)) \in I(p)$
gdw. $val_{I,\beta}(p(f(c))) = W$.

(c) Für die Eliminierung aller bedingten Terme in einer Formel $\sigma \in For$, verfahre folgendermaßen:

Solange es einen bedingten Term gibt, vollziehe diese beiden Schritte:

(i) wähle einen bedingten Term $\vartheta = \texttt{if}\ \phi\ \texttt{then}\ t_1\ \texttt{else}\ t_2$ aus, der in einer **atomaren**[1] Unterformel α von σ auftritt.

(ii) Ersetze α durch die Formel $\exists x((\phi \to x \doteq t_1) \wedge (\neg\phi \to x \doteq t_2) \wedge \alpha[\vartheta \leftarrow x])$, wobei in $\alpha[\vartheta \leftarrow x]$ alle Vorkommen von ϑ durch die Variable x ersetzt worden sind.

oder (ii') Ersetze α durch die Formel $((\phi \to \alpha[\vartheta \leftarrow t_1]) \wedge (\neg\phi \to \alpha[\vartheta \leftarrow t_2]))$.

Natürlich gibt es weitere Variationen. (ii) hat gegenüber (ii') den Vorteil, dass pro Ersetzung nur eine Variante von α eingeführt wird statt zwei. Somit wächst die Formel in (ii) linear, während sie in (ii') exponentiell wächst.

[1] Zur Erinnerung: Das heißt eine Formel der Form $p(t_1, t_2, ..., t_n)$ oder $t_1 \doteq t_2$ für Terme t_i