Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Dr. Vladimir Klebanov

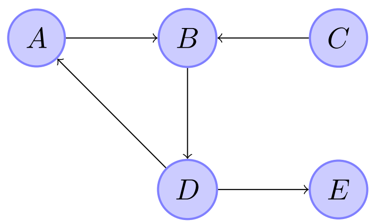
Formale Systeme, WS 2009/2010

Lösungen zum Übungsblatt 9

Dieses Blatt wurde in der Übung am 22.01.2010 besprochen.

Zu Aufgabe 1

$\succ = \{(a,b),(b,d),(c,b),(d,a),(d,e)\}$



(a)

$$\text{Die transitive Hülle } \xrightarrow{+} = \{(a,a),(a,b),(a,d),(a,e),\\ (b,a),(b,b),(b,d),(b,e),\\ (c,a),(c,b),(c,d),(c,e),\\ (d,a),(d,b),(d,d),(d,e)\}\ .$$

$$\text{Die reflexive, transitive Hülle } \rightarrow = \{(a,a),(a,b),(a,d),(a,e),\\ (b,a),(b,b),(b,d),(b,e),\\ (c,a),(c,b),\boldsymbol{(c,c)},(c,d),(c,e),\\ (d,a),(d,b),(d,d),(d,e),\\ \boldsymbol{(e,e)}\}\ .$$

$$\text{Die reflexive, transitive, symmetrische Hülle } \leftrightarrow = \{a,b,c,d,e\} \times \{a,b,c,d,e\}\ .$$

(b) Die Knoten a,b,c,e haben nicht mehr als einen Nachfolger bzgl. $\succ$: an diesen Stellen ist somit keine Divergenz möglich.

Der Knoten d hat zwei unmittelbare Nachfolger: a und e. Wegen $a \xrightarrow{+} e$ (s.o.) ist $\succ$ lokal konfluent.

Ebenfalls ist $\succ$ konfluent, da von allen Knoten aus, die von d erreichbar sind (a,b,d,e), der Knoten e erreichbar ist.

(Nota bene: Der Satz, dass jedes noethersche und lokal konfluente Reduktionssystem konfluent ist, ist hier nicht anwendbar, da die Relation nicht noethersch ist.)

(c) Wir fügen einen neuen Knoten f, sowie das Paar (a, f) hinzu. Die einzige neue Divergenz ist $f \prec a \succ b$. Wegen $b \xrightarrow{+} a \xrightarrow{+} f$ bleibt $\succ$ lokal konfluent. Die neue Relation ist aber nicht konfluent, da $b \xrightarrow{+} e$ gilt, und weder f noch e Nachfolger bzgl. $\succ$ haben.

Zu Aufgabe 2

Betrachten wir zunächst nur $(N, \succ)$

(a) Es gilt:

$$6 \succ 2, \ 6 \succ 3$$

Aber 2 und 3 sind irreduzible Elemente, weil sie keine echten Teiler größer 1 haben. Also ist das Reduktionssystem **nicht** lokal konfluent.

(b) ... und damit natürlich auch nicht konfluent.

(c) Aus $n \succ m$ folgt, dass $n > m$. In $\mathbb{N}$ kann es aber keine unendliche absteigende Kette geben ($(\mathbb{N}, >)$ ist noethersch), also ist $(N, \succ)$ noethersch.

(d) Die irreduziblen Elemente sind gerade die natürlichen Zahlen, die keine natürlichen Teiler haben außer 1 und sich selbst, also die Primzahlen.

Hier fällt der Begriff irreduzibel mit dem aus der Algebra/Zahlentheorie zusammen.

Desweiteren nun die Betrachtung für $(N', \succ)$: 1 ist Teiler jeder positiven natürlichen Zahl, also gilt, dass: $n \succ 1$ für alle $n \in N'$.

(a) folgt aus (b).

(b) Sei $n \succ m_1$ und $n \succ m_2$. Dann ist wegen $m_1 \succ 1$ und $m_2 \succ 1$ die Konfluenz gegeben.

(c) Das Argument von oben greift auch hier.

(d) 1 ist das einzig irreduzible Element.

Zu Aufgabe 3

Zur Einnerung das Prinzip der noetherschen Induktion:

Es sei $X \subseteq D$, so daß für alle $a \in D$ gilt

$$\underbrace{\{b \mid a \succ b\} \subseteq X}_{\text{Induktionsannahme}} \Rightarrow a \in X.$$

Dann ist $X = D$.

Wir benutzen die lexikographische Ordnung auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, d.h., es gelte $(m_1, m_2) \succ (n_1, n_2)$ genau dann, wenn

- $m_1 > n_1$ oder
- $m_1 = n_1$ und $m_2 > n_2$.

Die Relation $\succ$ ist offensichtlich noethersch mit dem minimalen Element $(0,0)$.

Sei $X \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Menge aller Eingabepaare, für die die Ackermann-Funktion terminiert. Wir zeigen mittels noetherscher Induktion, daß $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Sei nun also $(a_x, a_y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ beliebig, und es gelte $(b_x, b_y) \in X$ für alle (b_x, b_y) mit $(a_x, a_y) \succ (b_x, b_y)$ (Induktionsannahme). Wir müssen zeigen, daß daraus $(a_x, a_y) \in X$ folgt.

1. Fall: $a_x = 0$

$(0, a_y) \in X$ für alle $a_y \in \mathbb{N}$. Dies ergibt sich aus dem Programm (ohne Verwendung der Induktionsannahme).

2. Fall: $a_x \neq 0, a_y = 0$

Aus dem Programm ersehen wir, daß $A(a_x, 0) = A(a_x - 1, 1)$. Da $(a_x, 0) \succ (a_x - 1, 1)$, folgt aus der Induktionsannahme, dass $(a_x - 1, 1) \in X$. Damit ist auch $(a_x, 0) \in X$, da $A(a_x, 0)$ nur einen Schritt mehr macht als $A(a_x - 1, 1)$.

3. Fall: $a_x \neq 0, a_y \neq 0$

Es gilt $(a_x, a_y) \succ (a_x, a_y - 1)$ und somit per Induktionsannahme $(a_x, a_y - 1) \in X$. Also terminiert $A(a_x, a_y - 1)$.

Es gilt aber auch $(a_x, a_y) \succ (a_x - 1, b_y)$ für alle b_y. Dies gilt insbesondere für $b_y = A(a_x, a_y - 1)$. Also ist $(a_x - 1, A(a_x, a_y - 1)) \in X$, was bedeutet, dass $A(a_x, a_y) = A(a_x - 1, A(a_x, a_y - 1))$ terminiert.

Zu Aufgabe 4

(a) Die Menge aller von $\beta(x)$ erreichbaren Knoten ist die *kleinste* Menge, die

- $\beta(x)$ enthält und
- unter Anwendung von E abgeschlossen ist.

Diese kleinste Menge ist eindeutig bestimmt und Teilmenge jeder Menge mit diesen beiden Eigenschaften.

Darum lassen sich die von $\beta(x)$ erreichbaren Knoten auch als diejenigen charakterisieren, die in *jeder* Menge mit den beiden genannten Eigenschaften liegen (zu denen insbesonder auch die kleinste solche Menge zählt):

$$\phi(x,y) \quad = \quad \forall Q\, ((Q(x) \land \forall w \forall z\, (Q(w) \land E(w,z) \to Q(z))) \to Q(y)) \ .$$

(b) Ein gerichteter Graph ist zusammenhängend, wenn es von jedem Knoten einen Weg zu jedem anderen Knoten im Graph gibt:

$$\forall x \forall y\, (\neg(x \doteq y) \to \phi(x,y))$$

Da Gleichheit in PL2 definierbar ist, kann man auch ohne das Gleichheitszeichen auskommen:

$$\forall x \forall y\, (\exists P (P(x) \land \neg P(y)) \to \phi(x,y))$$