

Formale Systeme

Aussagenlogik: Normalformen

Prof. Dr. Bernhard Beckert | WS 2010/2011

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Disjunktive und Konjunktive Normalform

Definition

- Ein **Literal** ist ein Atom oder ein negiertes Atom
- Eine Formel ist in **disjunktiver Normalform** (DNF), wenn sie Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist.
- Eine Formel ist in **konjunktiver Normalform** (KNF), wenn sie Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist.

- 1 Zu jeder aussagenlogischen Formel A gibt es eine logisch äquivalente in disjunktiver Normalform und ebenso eine logisch äquivalente in konjunktiver Normalform.
- 2 Die Algorithmen zur Herstellung beider Normalformen ergeben sich unmittelbar aus elementaren Tautologien.
- 3 Ist die Wahrheitstafel einer Formel gegeben, so lassen sich disjunktive und konjunktive Normalform aus dieser „direkt“ ablesen.
- 4 Disjunktive und konjunktive Normalform einer Formel sind nicht eindeutig.

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Um zu prüfen, ob

$$A_n = (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge \dots \wedge (\neg P_{n,1} \vee \neg P_{n,2})$$

eine Tautologie ist, wird die Unerfüllbarkeit von

$$\neg A_n = (P_{1,1} \wedge P_{1,2}) \vee \dots \vee (P_{n,1} \wedge P_{n,2})$$

geprüft. Die konjunktive Normalform von $\neg A_n$ ist:

$$\bigwedge \{P_{1,f(1)} \vee \dots \vee P_{n,f(n)} \mid f : 1, \dots, n \rightarrow 1, 2\}.$$

Für $n = 3$ ist das:

$$\begin{aligned} & (P_{1,1} \vee P_{2,1} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,1} \vee P_{2,1} \vee P_{3,2}) \wedge \\ & (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,2}) \wedge \\ & (P_{1,2} \vee P_{2,1} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,2} \vee P_{2,1} \vee P_{3,2}) \wedge \\ & (P_{1,2} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,2} \vee P_{2,2} \vee P_{3,2}) \end{aligned}$$

In $\neg A_n$ treten $2 * n$ Literale auf, in der KNF $n * 2^n$.

Eingabe: $\neg A_n = \neg((\neg P_{1,1} \wedge \neg P_{1,2}) \vee \dots \vee (\neg P_{n,1} \wedge \neg P_{n,2}))$

1. Schritt (Einführung neuer Atome):

$$Q_1 \leftrightarrow \neg P_{1,1} \wedge \neg P_{1,2}$$

\vdots

$$Q_j \leftrightarrow \neg P_{j,1} \wedge \neg P_{j,2}$$

\vdots

$$Q_n \leftrightarrow \neg P_{n,1} \wedge \neg P_{n,2}$$

$$Q_{n+1} \leftrightarrow Q_1 \vee Q_2$$

$$Q_{n+2} \leftrightarrow Q_{n+1} \vee Q_3$$

\vdots

$$Q_{2n-1} \leftrightarrow Q_{2n-2} \vee Q_n$$

$$\neg A_n \leftrightarrow \neg Q_{2n-1}$$

2. Schritt: Auflösung der Äquivalenzen

$$\begin{array}{l|l} \vdots & \vdots \\ Q_i \leftrightarrow \neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2} & (\neg Q_i \vee (\neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2})) \wedge \\ & (Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2}) \\ \vdots & \vdots \\ Q_{n+1} \leftrightarrow Q_1 \vee Q_2 & (\neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2) \wedge \\ & (Q_{n+1} \vee \neg(Q_1 \vee Q_2)) \\ \vdots & \vdots \\ Q_{2n-1} \leftrightarrow Q_{2n-2} \vee Q_n & (\neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n) \wedge \\ & (Q_{2n-1} \vee \neg(Q_{2n-2} \vee Q_n)) \\ \neg A_n & \neg Q_{2n-1} \end{array}$$

3. Schritt: Konjunktive Normalform

$$\begin{array}{l|l} \vdots & \vdots \\ (\neg Q_i \vee (\neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2})) \wedge & (\neg Q_i \vee \neg P_{i,1}) \wedge (\neg Q_i \vee \neg P_{i,2}) \wedge \\ (Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2}) & (Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2}) \\ \vdots & \vdots \\ (\neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2) \wedge & (\neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2) \wedge \\ (Q_{n+1} \vee \neg(Q_1 \vee Q_2)) & (Q_{n+1} \vee \neg Q_1) \wedge (Q_{n+1} \vee \neg Q_2) \\ \vdots & \vdots \\ (\neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n) \wedge & (\neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n) \wedge \\ (Q_{2n-1} \vee \neg(Q_{2n-2} \vee Q_n)) & (Q_{2n-1} \vee \neg Q_{2n-2}) \wedge (Q_{2n-1} \vee \neg Q_n) \\ \neg Q_{2n-1} & \neg Q_{2n-1} \end{array}$$

Eingabe:

$$A_3 = (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge (\neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}) \wedge (\neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2})$$

Berechne KNF für $\neg A_3$

1. Schritt:

$$Q_1 \leftrightarrow \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_2 \leftrightarrow \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_3 \leftrightarrow \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_4 \leftrightarrow Q_1 \wedge Q_2$$

$$Q_5 \leftrightarrow Q_4 \wedge Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

3. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$(Q_1 \vee P_{1,1}) \wedge (Q_1 \vee P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$(Q_2 \vee P_{2,1}) \wedge (Q_2 \vee P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$(Q_3 \vee P_{3,1}) \wedge (Q_3 \vee P_{3,2})$$

$$(\neg Q_4 \vee Q_1) \wedge (\neg Q_4 \vee Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$(\neg Q_5 \vee Q_4) \wedge (\neg Q_5 \vee Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

Theorem

Zu jeder aussagenlogischen Formel A mit n Literalvorkommen gibt es eine konjunktive Normalform A_{kknf} , so dass

- *A ist erfüllbar gdw A_{kknf} erfüllbar ist,*
- *A_{kknf} enthält höchstens $c * n$ Literalvorkommen für eine von n unabhängige Konstante c ,*
- *A_{kknf} effektiv aus A in polynomieller (sogar linearer) Zeit konstruiert werden kann.*