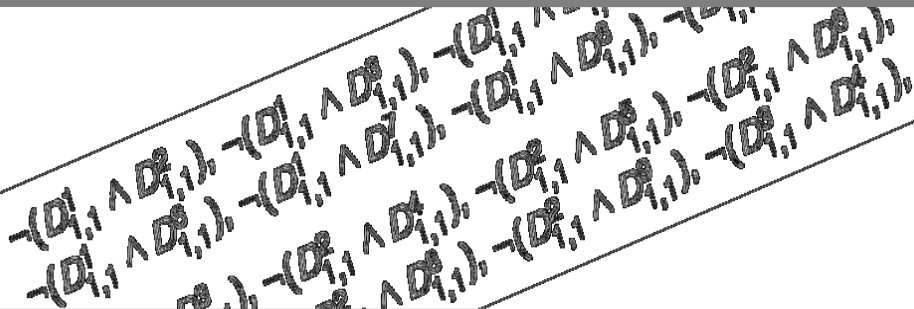


# Formale Systeme

## Binary Decision Diagrams

Prof. Dr. Bernhard Beckert | WS 2010/2011

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



# Shannon Formeln

*Shannon Formeln* sind aussagenlogische Formeln, die aufgebaut sind aus

- dem dreistelligen Operator *sh*
- den Konstanten 0 und 1
- Aussagevariablen  $P_1, \dots, P_n, \dots$

Der Wahrheitswerteverlauf von *sh* wird gegeben durch

$$sh(P_1, P_2, P_3) = \begin{cases} P_2 & \text{falls } P_1 = 0 \\ P_3 & \text{falls } P_1 = 1 \end{cases}$$

oder in Tabellenform:

$P_1$	1	1	1	1	0	0	0	0
$P_2$	1	1	0	0	1	1	0	0
$P_3$	1	0	1	0	1	0	1	0
$sh(P_1, P_2, P_3)$	1	0	1	0	1	1	0	0

- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_3)$
- $sh(0, P_2, P_3) \leftrightarrow P_2$
- $sh(1, P_2, P_3) \leftrightarrow P_3$
- $sh(P, 0, 1) \leftrightarrow P$
- $sh(P, 1, 0) \leftrightarrow \neg P$
- $sh(P_1, P_2, P_2) \leftrightarrow P_2$
- $sh(sh(P_1, P_2, P_3), P_4, P_5) \leftrightarrow sh(P_1, sh(P_2, P_4, P_5), sh(P_3, P_4, P_5))$
- $A \leftrightarrow sh(P, A_{P=0}, A_{P=1})$
- $\neg sh(A, B, C) \leftrightarrow sh(A, \neg B, \neg C)$

Wir fixieren eine Ordnung auf der Menge der Aussagevariablen, etwa die durch die Ordnung der Indizes gegebene.

## Definition

- 1 Die Konstanten 0, 1 sind normierte *sh*-Formeln.
- 2  $sh(P_i, A, B)$  ist eine normierte *sh*-Formel wenn
  - $A$  und  $B$  normierte *sh*-Formeln sind und
  - für jede in  $A$  oder  $B$  vorkommende Aussagenvariable  $P_j$  gilt  $j > i$ .

## Theorem

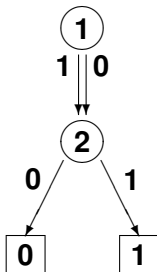
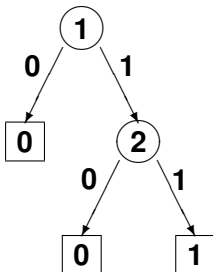
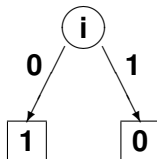
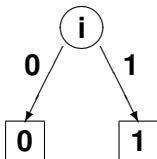
*Zu jeder aussagenlogischen Formel  $A$  gibt es eine äquivalente normierte *sh*-Formel  $B$ .*

## Definition

Ein *sh-Graph* ist ein gerichteter, binärer, zusammenhängender Graph.

- Jedem nichtterminalen Knoten  $v$  ist eine natürliche Zahl  $index(v)$  zugeordnet.
- Von jedem nichtterminalen Knoten  $v$  gehen zwei Kanten aus. Eine davon ist mit 0, die andere mit 1 gekennzeichnet.
- Jedem terminalen Knoten  $v$  ist eine der Zahlen 0 oder 1 zugeordnet, bezeichnet mit  $wert(v)$ .
- Ist der nichtterminale Knoten  $w$  ein unmittelbarer Nachfolger von  $v$ , dann gilt  $index(v) < index(w)$ .
- Es gibt genau einen Wurzelknoten.

# Beispiele von Shannon Graphen



# Shannon Graphen vs normierte Shannon Formeln

Es gibt eine offensichtliche Korrespondenz  
zwischen

Shannon Graphen

und

normierten Shannon Formeln:

*n*-te Variable entspricht Knoten mit Index *n*

Von jetzt an betrachten wir nur noch Shannon Graphen.

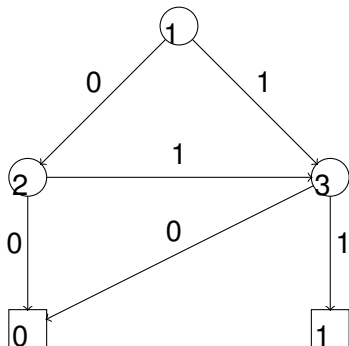
# Shannon Graphen und Boolesche Funktionen

- Jedem  $sh$ -Graphen  $G$  kann man eine  $m$ -stellige Boolesche Funktion  $f_G$  zuordnen, wobei  $m$  die Anzahl der in  $G$  vorkommenden verschiedenen Indizes  $i_1, \dots, i_m$  ist.
- Wir fassen  $f_G$  als eine Funktion mit den Eingabevariablen  $P_{i_1}, \dots, P_{i_m}$  auf und bestimmen den Funktionswert  $f_G(P_{i_1}, \dots, P_{i_m})$ , indem wir an der Wurzel von  $G$  beginnend einen Pfad durch  $G$  wählen. Am Knoten  $v$  folgen wir der Kante 0, wenn die Eingabevariable  $P_{index(v)}$  den Wert 0 hat, sonst der Kante 1.
- Der Wert des terminalen Knotens ist dann der gesuchte Funktionswert.



# Shannongraph als Boolesche Funktion

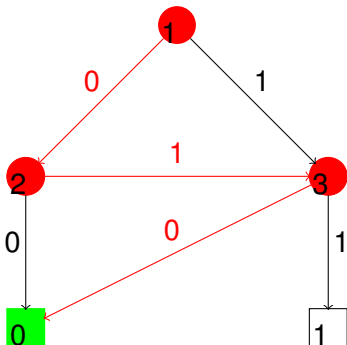
G:



$$f_G(0, 1, 0) = ?$$

# Shannongraph als Boolesche Funktion

G:



$$f_G(0, 1, 0) = ?0$$

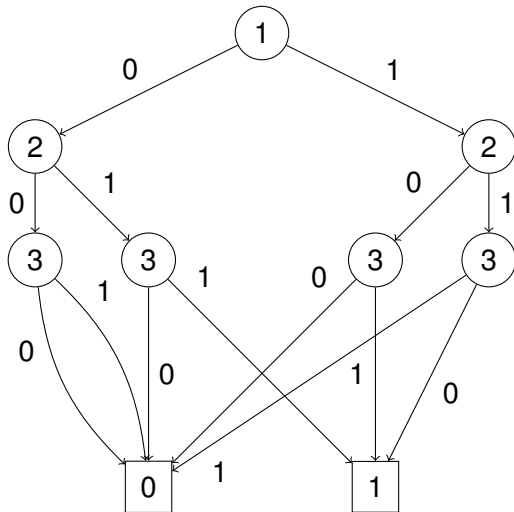
## Definition

Ein *sh*-Graph heißt *reduziert*, wenn

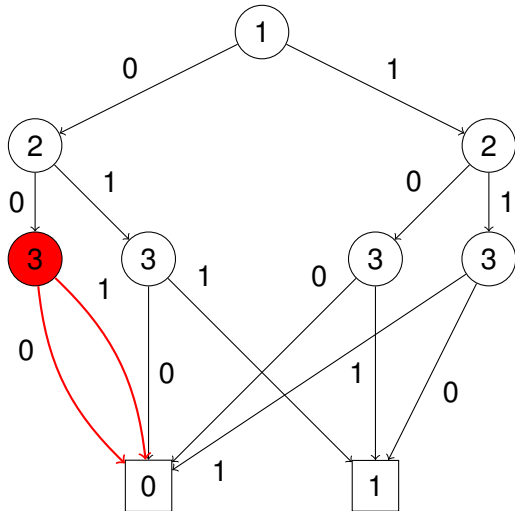
- 1 es keine zwei Knoten  $v$  und  $w$  ( $v \neq w$ ) gibt, so daß der in  $v$  verwurzelte Teilgraph  $G_v$  mit dem in  $w$  verwurzelten Teilgraph  $G_w$  isomorph ist.
- 2 es keinen Knoten  $v$  gibt, so dass die beiden von  $v$  ausgehenden Kanten zum selben Nachfolgerknoten führen.

Ein reduzierter Shannongraph heißt auch *ordered binary decision diagram* (OBDD).

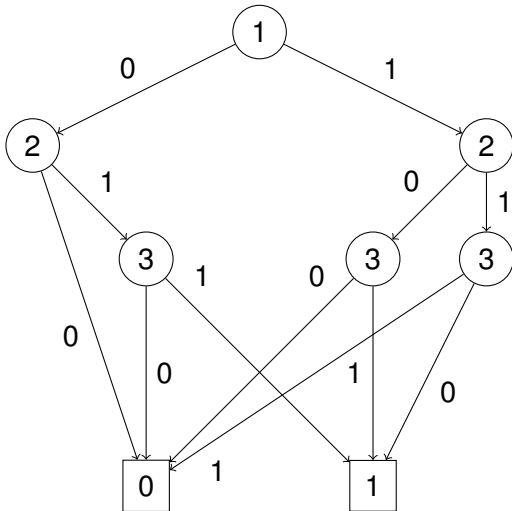
# Ein Beispiel



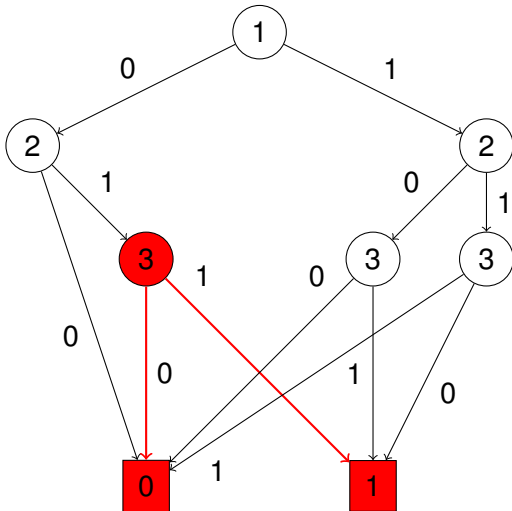
# Doppelte Kanten



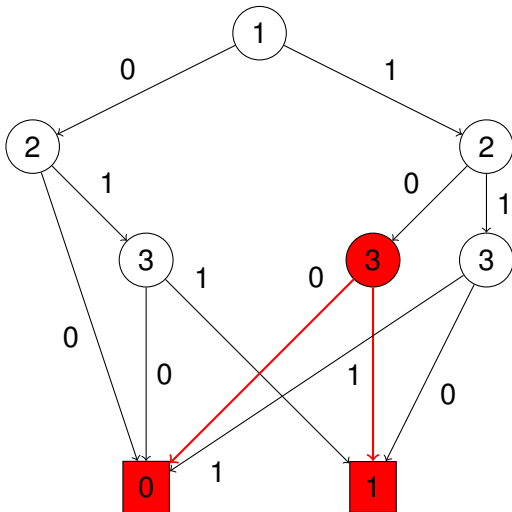
# Elimination doppelter Kanten



# Isomorphe Teilgraphen

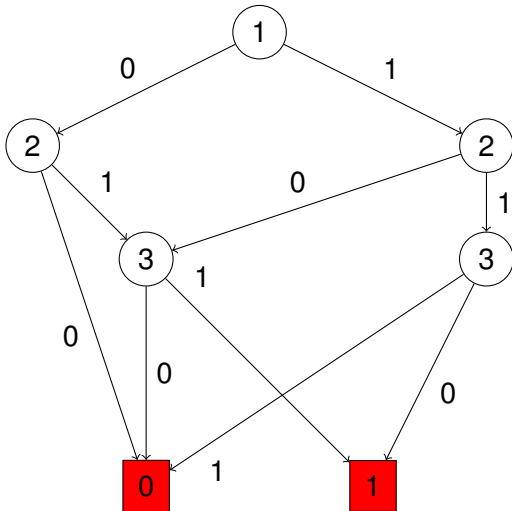


# Isomorphe Teilgraphen

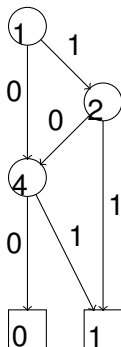
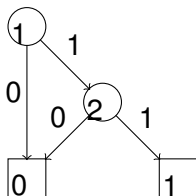




# Reduktion isomorpher Teilgraphen



# Weitere Beispiele



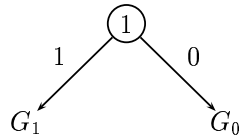
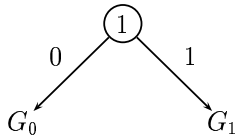
## Definition

Seien zwei *sh*-Graphen  $H, G$  gegeben. Ihre Knotenmengen seien  $V_1, V_2$ .

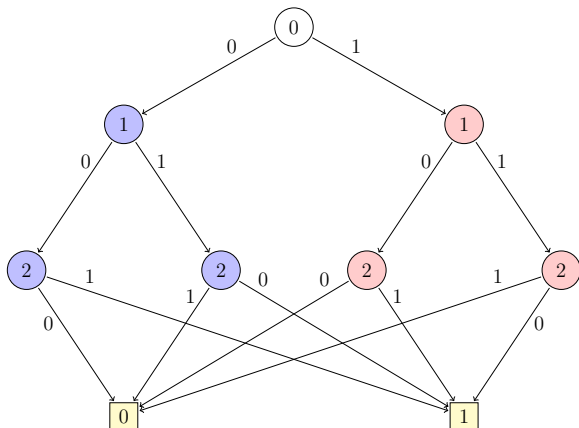
$H, G$  heißen zueinander *isomorph* ( $H \cong G$ ) genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung  $\pi$  von  $V_1$  nach  $V_2$  gibt mit:

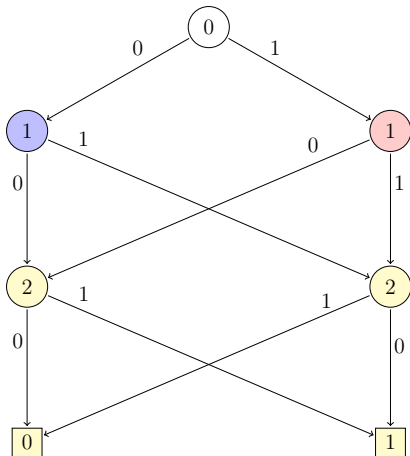
- 1  $index(k) = index(\pi(k))$  für jeden Nichtterminalknoten  $k \in V_1$
- 2  $wert(k) = wert(\pi(k))$  für jeden Terminalknoten  $k \in V_1$
- 3 Für jeden Nichtterminalknoten  $k \in V_1$ , dessen 0-Kante/1-Kante zu dem Knoten  $k_0/k_1$  führt, gilt: die 0-Kante von  $\pi(k)$  führt zu  $\pi(k_0)$ , die 1-Kante zu  $\pi(k_1)$ .

# Einfachstes Beispiel isomorpher Shannon Graphen

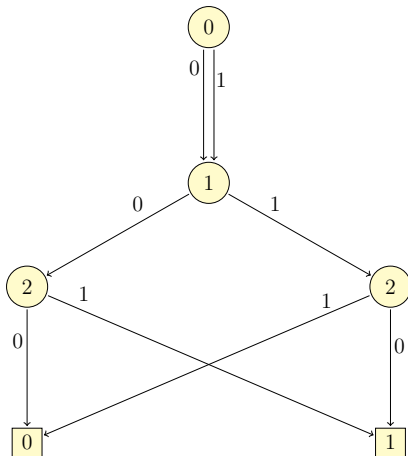


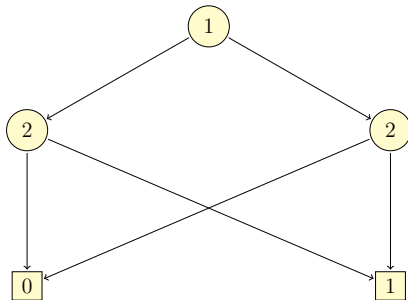
# Komplexeres Beispiel isomorpher Shannon Graphen





# Zweite Reduktion







## Theorem

*Sei  $G$  ein Shannongraph, so daß für jedes Paar von Knoten  $v, w$  gilt*

*wenn die 1-Nachfolger von  $v$  und  $w$  gleich sind und  
die 0-Nachfolger von  $v$  und  $w$  gleich sind*

*dann  $v = w$*

*Dann erfüllt  $G$  die Bedingung (1) aus der Definition reduzierter Shannongraphen, d.h. für jedes Paar  $x, y$  von Knoten gilt*

*wenn  $G_x$  isomorph zu  $G_y$  ist*

*dann  $x = y$*

# Eindeutigkeit reduzierter Shannon Graphen

## Theorem

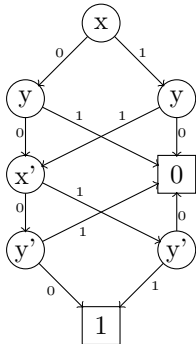
*Sind  $G, H$  reduzierte sh-Graphen zu  $\Sigma = \{P_1, \dots, P_n\}$ , dann gilt*

$$f_G = f_H \Leftrightarrow G \cong H.$$

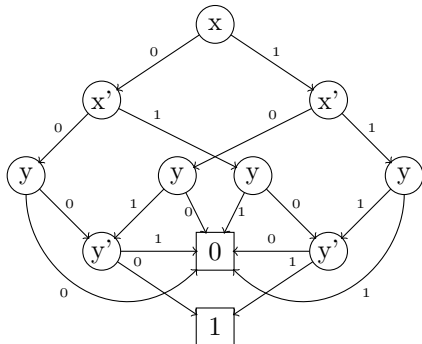
*(Zu jeder Booleschen Funktion  $f$  gibt es bis auf Isomorphie genau einen reduzierten sh-Graphen  $H$  mit  $f = f_H$ ).*

# Abhängigkeit von der Variablenordnung

Zwei BDDs für  $(x \leftrightarrow y) \wedge (x' \leftrightarrow y')$



Ordnung:  
 $x < y < x' < y'$



Ordnung:  
 $x < x' < y < y'$

[BDD für Multiplikationen]

- $X$  enthalte  $2k$  Variablen  $\{x_0, \dots, x_{k-1}, y_0, \dots, y_{k-1}\}$
- $x = x_0 \dots x_{k-1}$  und  $y = y_0 \dots y_{k-1}$  bezeichnen  $k$ -stellige Binärzahlen.
- für  $0 \leq i < 2k$  bezeichne  $Mult_i$  die boolesche Funktion, die das  $i$ -te Bit des Produktes von  $x$  mit  $y$  beschreibt.

## Theorem

*Für jede Ordnung  $<$  der Variablen in  $X$  gibt es einen Index  $0 \leq i < 2k$ , so dass der BDD  $B_{Mult_i, <}$  mindestens  $2^{k/8}$  Knoten besitzt.*