Formale Systeme

Aussagenlogik: Sequenzenkalkül

Prof. Dr. Bernhard Beckert | WS 2010/2011

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Kalküle für die Aussagenlogik

1. Hilbert-Kalkül
2. Resolutionskalkül
3. Tableaukalkül
4. Sequenzenkalkül

Sequenzenkalküle

- 1935 von G. Gentzen eingeführt
- spielen eine zentrale Rolle in der Beweistheorie
- Literatur: J. Gallier. *Logic for Computer Science.* Harper & Row 1986

Sequenzen

Definition

Eine *Sequenz* ist ein Paar endlicher Mengen von Formeln und wird notiert in der Form

$$\Gamma \Rightarrow \Delta.$$

Γ wird Antezedent und Δ Sukzedent genannt.

Sowohl links wie rechts vom Sequenzenpfeil $\Rightarrow$ kann auch die leere Menge stehen. Wir schreiben dann

$$\Rightarrow \Delta \quad \text{bzw.} \quad \Gamma \Rightarrow \quad \text{bzw.} \quad \Rightarrow .$$

Sequenzen

Ist $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ und B eine Formel, so schreiben wir

$$\Gamma, B \quad \text{für die Menge} \quad \{A_1, \ldots, A_n, B\},$$

Entsprechend werden

$$B, \Gamma \qquad \Gamma, \Delta \qquad \Gamma, B, \Delta$$

benutzt.

Semantik von Sequenzen

Sei I eine Interpretation.

Definition: Auswertung von Sequenzen

$$
\begin{array}{ll}
val_I(\Gamma \Rightarrow \Delta) = val_I(\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta) & \text{für } \Gamma, \Delta \neq \emptyset \\
val_I(\Gamma \Rightarrow) \quad = val_I(\neg \bigwedge \Gamma) & \\
val_I(\Rightarrow \Delta) \quad = val_I(\bigvee \Delta) & \\
val_I(\Rightarrow) \quad = \mathbf{F} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\bigwedge \Gamma & = & \text{Konjunktion aller Formeln in } \Gamma \\
\bigvee \Gamma & = & \text{Disjunktion aller Formeln in } \Gamma
\end{array}
$$

Die Konjunktion über die leere Folge wird demnach zu **W** und die Disjunktion über die leere Folge zu **F** ausgewertet.

Axiome und Regeln

Definition

Axiome:

$$\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta, A, \Delta'.$$

Die Regeln sind

$$(\neg links) \quad \frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\wedge links) \quad \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\vee links) \quad \frac{\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \vee B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\rightarrow links) \quad \frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta \qquad B, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \rightarrow B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

Regeln (Forts.)

Definition: Fortsetzung

$$(\neg \textit{rechts}) \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A, \Delta'}$$

$$(\wedge \textit{rechts}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Delta' \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B), \Delta'}$$

$$(\vee \textit{rechts}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B), \Delta'}$$

$$(\rightarrow \textit{rechts}) \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \rightarrow B), \Delta'}$$

Zusätzliche Regeln für eine Menge M von Voraussetzungen

$$(\text{einfügen}_M) \quad \frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

für $B \in M$

Beispiel einer Ableitung im Sequenzenkalkül

an der Tafel!

Ableitbarkeit im Sequenzenkalkül

Definition

Für $A \in For0$, $M \subseteq For0$ sagen wir, dass A *aus* M *ableitbar in* **S**0 ist,

$$M \vdash_S A,$$

gdw.

eine Ableitung von $\Rightarrow A$ aus M in **S**0 existiert.

Korrektheits und Vollständigkeitssatz

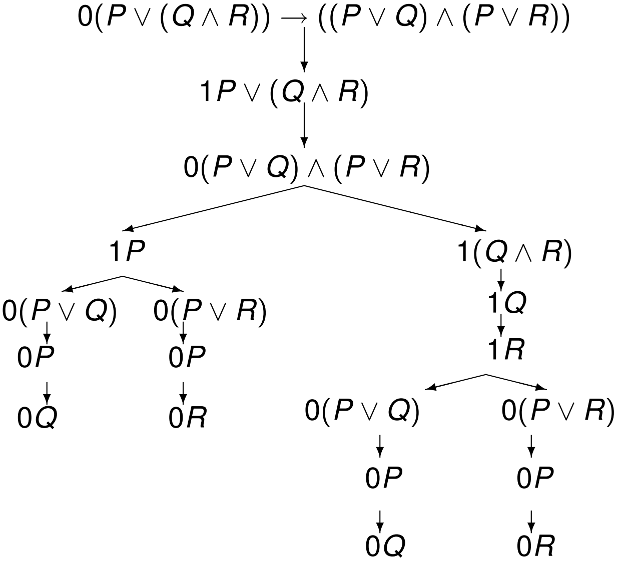
Theorem

S0 ist korrekt und vollständig:
es gilt also

$$M \models A \quad \Leftrightarrow \quad M \vdash_{\mathbf{S0}} A.$$

Beweis
Siehe etwa Gallier, 1986.

Beispiel eines Tableau-Beweises



S0-Ableitung von $(P \vee (Q \wedge R)) \to ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

(1)	$P \Rightarrow P, Q$	(Axiom)
(2)	$P \Rightarrow P, R$	(Axiom)
(3)	$Q, R \Rightarrow P, Q$	(Axiom)
(4)	$Q, R \Rightarrow P, R$	(Axiom)
(5)	$P \Rightarrow P \vee Q$	($\vee$ re 1)
(6)	$P \Rightarrow P \vee R$	($\vee$ re 2)
(7)	$Q, R \Rightarrow P \vee Q$	($\vee$ re 3)
(8)	$Q, R \Rightarrow P \vee R$	($\vee$ re 4)
(9)	$P \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$	($\wedge$ re 5,6)
(10)	$Q \wedge R \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$	($\wedge$ re 7,8)
(11)	$(P \vee (Q \wedge R)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$	($\vee$ li 9,10)
(12)	$\emptyset \Rightarrow (P \vee (Q \wedge R)) \to ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$	($\to$ re 11)

Beweis in Baumdarstellung

$$\emptyset \Rightarrow (P \vee (Q \wedge R)) \rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$$

$$(P \vee (Q \wedge R)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$$

$$P \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R)) \qquad Q \wedge R \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$$

$$P \Rightarrow P \vee Q \qquad P \Rightarrow P \vee R$$

$$P \Rightarrow P, Q \qquad P \Rightarrow P, R \qquad Q, R \Rightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Axiom Axiom

$$Q, R \Rightarrow P \vee Q \qquad Q, R \Rightarrow P \vee R$$

$$Q, R \Rightarrow P, Q \qquad Q, R \Rightarrow P, R$$

Axiom *Axiom*

Transformation von Tableau zu Sequenz

Definition

T ein beliebiges Tableau. Wir definieren einen Ableitungsbaum $Seq(T)$ im Sequenzenkalkül wie folgt:
Bei der Anwendung einer α-Regel beim Aufbau des Tableaus T, werden jeweils zwei Knoten hinzugefügt, der erste und der zweite α-Knoten. Die Knoten von $Seq(T)$ sind alle Knoten von T mit Ausnahme der ersten α Knoten.
Ein Knoten, N, in $Seq(T)$ wird mit der Sequenz

$$A_1, \ldots, A_k \Rightarrow B_1, \ldots B_n$$

markiert, wobei $A_1, \ldots, A_k$ alle Formeln sind, so dass $1A_i$ auf dem Teilpfad P vorkommt, der von N zur Wurzel von T führt und $B_1, \ldots B_n$ alle Formeln sind, so dass $0B_i$ auf P liegt und noch keine Tableauregel auf $1A_i$ und $0B_j$ angewendet wurde.

Transformation von Tableau zu Sequenz

Theorem (Korrektheit der Transformation Seq)

Ist T ein abgeschlossenes Tableau, so ist $Seq(T)$ ein Beweisbaum im Sequenzenkalkül.