



- 1 Hilbert-Kalkül
- 2 Resolutionskalkül
- 3 Tableauekalkül
- 4 Sequenzenkalkül

- 1935 von G. GENTZEN eingeführt
- spielen eine zentrale Rolle in der Beweistheorie
- Literatur: J. Gallier. *Logic for Computer Science*. Harper & Row 1986

- 1935 von G. GENTZEN eingeführt
- spielen eine zentrale Rolle in der Beweistheorie
- Literatur: J. Gallier. *Logic for Computer Science*. Harper & Row 1986

- 1935 von G. GENTZEN eingeführt
- spielen eine zentrale Rolle in der Beweistheorie
- Literatur: J. Gallier. *Logic for Computer Science*. Harper & Row 1986

## Definition

Eine *Sequenz* ist ein Paar endlicher Mengen von Formeln und wird notiert in der Form

$$\Gamma \Rightarrow \Delta.$$

$\Gamma$  wird Antezedent und  $\Delta$  Sukzedent genannt.

Sowohl links wie rechts vom Sequenzenpfeil  $\Rightarrow$  kann auch die leere Menge stehen. Wir schreiben dann

$$\Rightarrow \Delta \quad \text{bzw.} \quad \Gamma \Rightarrow \quad \text{bzw.} \quad \Rightarrow .$$

Ist  $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$  und  $B$  eine Formel, so schreiben wir

$\Gamma, B$  für die Menge  $\{A_1, \dots, A_n, B\}$ ,

Entsprechend werden

$B, \Gamma$      $\Gamma, \Delta$      $\Gamma, B, \Delta$

benutzt.

Sei  $I$  eine Interpretation.

## Definition: Auswertung von Sequenzen

$$val_I(\Gamma \Rightarrow \Delta) = val_I(\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta) \quad \text{für } \Gamma, \Delta \neq \emptyset$$

$$val_I(\Gamma \Rightarrow) = val_I(\neg \bigwedge \Gamma)$$

$$val_I(\Rightarrow \Delta) = val_I(\bigvee \Delta)$$

$$val_I(\Rightarrow) = \mathbf{F}$$

$\bigwedge \Gamma =$  Konjunktion aller Formeln in  $\Gamma$

$\bigvee \Gamma =$  Disjunktion aller Formeln in  $\Gamma$

Die Konjunktion über die leere Folge wird demnach zu **W** und die Disjunktion über die leere Folge zu **F** ausgewertet.

## Definition

*Axiome:*

$$\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta, A, \Delta'.$$

Die Regeln sind

$$(\neg \text{links}) \frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\wedge \text{links}) \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\vee \text{links}) \frac{\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \vee B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\rightarrow \text{links}) \frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \rightarrow B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

## Definition

*Axiome:*

$$\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta, A, \Delta'.$$

Die Regeln sind

$$(\neg \text{links}) \frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\wedge \text{links}) \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\vee \text{links}) \frac{\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \vee B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\rightarrow \text{links}) \frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \rightarrow B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

## Definition

*Axiome:*

$$\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta, A, \Delta'.$$

Die Regeln sind

$$(\neg \text{links}) \frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\wedge \text{links}) \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\vee \text{links}) \frac{\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \vee B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\rightarrow \text{links}) \frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \rightarrow B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

## Definition

*Axiome:*

$$\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta, A, \Delta'.$$

Die Regeln sind

$$(\neg \text{links}) \frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\wedge \text{links}) \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\vee \text{links}) \frac{\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \vee B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\rightarrow \text{links}) \frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \rightarrow B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

## Definition: Fortsetzung

$$(\neg\text{rechts}) \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A, \Delta'}$$

$$(\wedge\text{rechts}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Delta' \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B), \Delta'}$$

$$(\vee\text{rechts}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B), \Delta'}$$

$$(\rightarrow\text{rechts}) \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \rightarrow B), \Delta'}$$

Zusätzliche Regeln für eine Menge  $M$  von Voraussetzungen

$$(\text{einfügen}_M) \frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

für  $B \in M$

## Definition: Fortsetzung

$$(\neg\text{rechts}) \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A, \Delta'}$$

$$(\wedge\text{rechts}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Delta' \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B), \Delta'}$$

$$(\vee\text{rechts}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B), \Delta'}$$

$$(\rightarrow\text{rechts}) \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \rightarrow B), \Delta'}$$

Zusätzliche Regeln für eine Menge  $M$  von Voraussetzungen

$$(\text{einfügen}_M) \frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

für  $B \in M$

## Definition: Fortsetzung

$$(\neg\text{rechts}) \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A, \Delta'}$$

$$(\wedge\text{rechts}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Delta' \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B), \Delta'}$$

$$(\vee\text{rechts}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B), \Delta'}$$

$$(\rightarrow\text{rechts}) \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \rightarrow B), \Delta'}$$

Zusätzliche Regeln für eine Menge  $M$  von Voraussetzungen

$$(\text{einfügen}_M) \frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

für  $B \in M$

## Definition: Fortsetzung

$$(\neg\text{rechts}) \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A, \Delta'}$$

$$(\wedge\text{rechts}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Delta' \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B), \Delta'}$$

$$(\vee\text{rechts}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B), \Delta'}$$

$$(\rightarrow\text{rechts}) \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \rightarrow B), \Delta'}$$

Zusätzliche Regeln für eine Menge  $M$  von Voraussetzungen

$$(\text{einfügen}_M) \frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

für  $B \in M$

## Definition: Fortsetzung

$$(\neg\text{rechts}) \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A, \Delta'}$$

$$(\wedge\text{rechts}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Delta' \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B), \Delta'}$$

$$(\vee\text{rechts}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B), \Delta'}$$

$$(\rightarrow\text{rechts}) \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \rightarrow B), \Delta'}$$

Zusätzliche Regeln für eine Menge  $M$  von Voraussetzungen

$$(\text{einfügen}_M) \frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

für  $B \in M$

## Definition: Fortsetzung

$$(\neg\text{rechts}) \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A, \Delta'}$$

$$(\wedge\text{rechts}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Delta' \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B), \Delta'}$$

$$(\vee\text{rechts}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B), \Delta'}$$

$$(\rightarrow\text{rechts}) \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \rightarrow B), \Delta'}$$

Zusätzliche Regeln für eine Menge  $M$  von Voraussetzungen

$$(\text{einfügen}_M) \frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

für  $B \in M$

# Beispiel einer Ableitung im Sequenzenkalkül

an der Tafel!

## Definition

Für  $A \in \text{For}_0$ ,  $M \subseteq \text{For}_0$  sagen wir, dass  $A$  aus  $M$  ableitbar in  $\mathbf{S0}$  ist,

$$M \vdash_{\mathbf{S0}} A,$$

gdw.

eine Ableitung von  $\Rightarrow A$  aus  $M$  in  $\mathbf{S0}$  existiert.

## Theorem

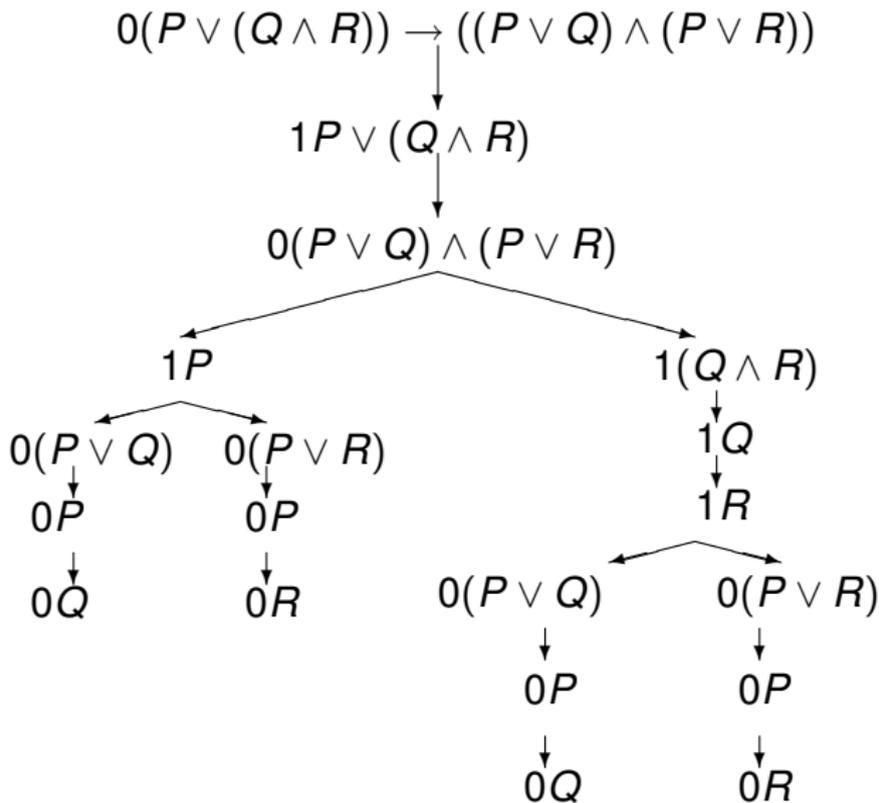
**S0** ist korrekt und vollständig:  
es gilt also

$$M \models A \quad \Leftrightarrow \quad M \vdash_{\text{S0}} A.$$

*Beweis*

Siehe etwa Gallier, 1986.

# Beispiel eines Tableau-Beweises



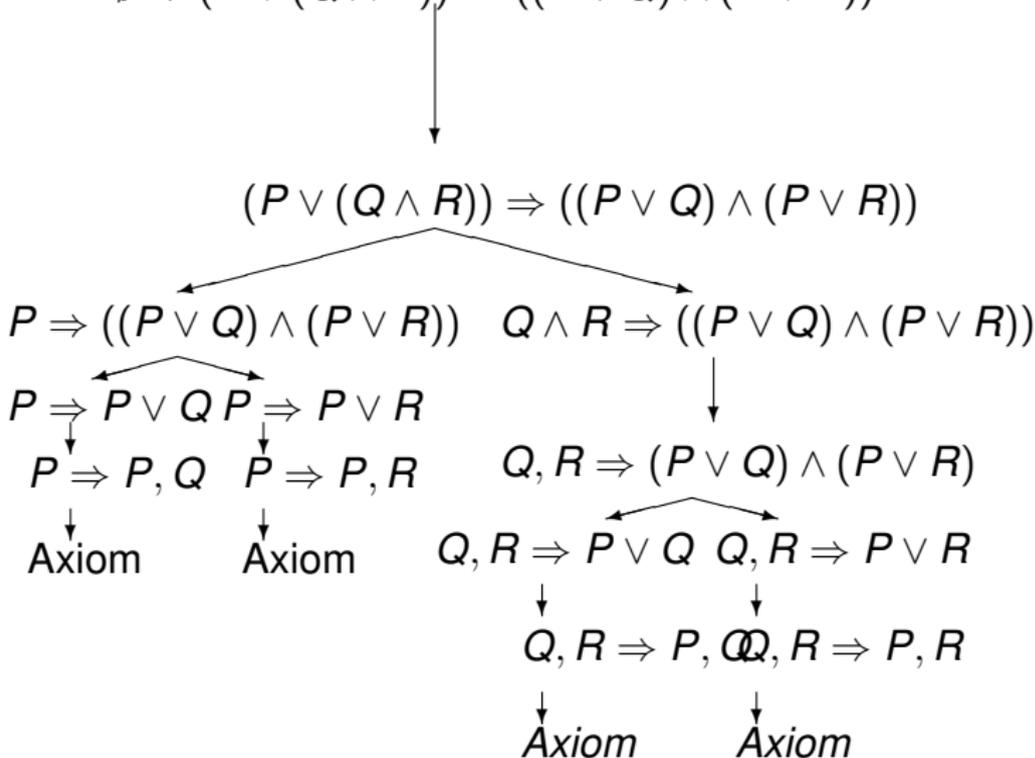
# S0-Ableitung von

$$(P \vee (Q \wedge R)) \rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$$

- |      |  |                        |
|------|--|------------------------|
| (1)  | $P \Rightarrow P, Q$   | (Axiom)                |
| (2)  | $P \Rightarrow P, R$   | (Axiom)                |
| (3)  | $Q, R \Rightarrow P, Q$  | (Axiom)                |
| (4)  | $Q, R \Rightarrow P, R$  | (Axiom)                |
| (5)  | $P \Rightarrow P \vee Q$   | ( $\vee$ re 1)         |
| (6)  | $P \Rightarrow P \vee R$   | ( $\vee$ re 2)         |
| (7)  | $Q, R \Rightarrow P \vee Q$  | ( $\vee$ re 3)         |
| (8)  | $Q, R \Rightarrow P \vee R$  | ( $\vee$ re 4)         |
| (9)  | $P \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$   | ( $\wedge$ re 5,6)     |
| (10) | $Q \wedge R \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$                                  | ( $\wedge$ re 7,8)     |
| (11) | $(P \vee (Q \wedge R)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$                       | ( $\vee$ li 9,10)      |
| (12) | $\emptyset \Rightarrow (P \vee (Q \wedge R)) \rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ | ( $\rightarrow$ re 11) |

# Beweis in Baumdarstellung

$$\emptyset \Rightarrow (P \vee (Q \wedge R)) \rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$$



# Transformation von Tableau zu Sequenz

## Definition

$T$  ein beliebiges Tableau. Wir definieren einen Ableitungsbaum  $Seq(T)$  im Sequenzenkalkül wie folgt:

Bei der Anwendung einer  $\alpha$ -Regel beim Aufbau des Tableaus  $T$ , werden jeweils zwei Knoten hinzugefügt, der erste und der zweite  $\alpha$ -Knoten. Die Knoten von  $Seq(T)$  sind alle Knoten von  $T$  mit Ausnahme der ersten  $\alpha$  Knoten.

Ein Knoten,  $N$ , in  $Seq(T)$  wird mit der Sequenz

$$A_1, \dots, A_k \Rightarrow B_1, \dots, B_n$$

markiert, wobei  $A_1, \dots, A_k$  alle Formeln sind, so dass  $1A_i$  auf dem Teilpfad  $P$  vorkommt, der von  $N$  zur Wurzel von  $T$  führt und  $B_1, \dots, B_n$  alle Formeln sind, so dass  $0B_j$  auf  $P$  liegt und noch keine Tableauregel auf  $1A_i$  und  $0B_j$  angewendet wurde.

# Transformation von Tableau zu Sequenz

## Theorem (Korrektheit der Transformation Seq)

*Ist  $T$  ein abgeschlossenes Tableau, so ist  $\text{Seq}(T)$  ein Beweisbaum im Sequenzenkalkül.*