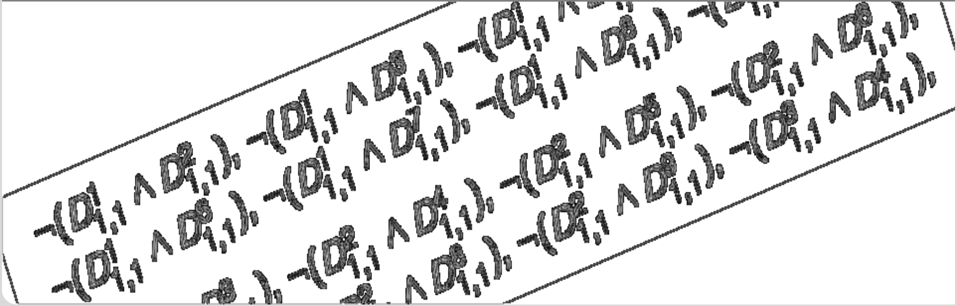
Formale Systeme

Prädikatenlogik: Hilbertkalkül

Prof. Dr. Bernhard Beckert | WS 2010/2011

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Hilbertkalkül

Axiome sind Schemata! x steht für eine Variable, t für einen Term, A, B, C stehen für Formeln.

Ax1:	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$		(Abschwächung)
Ax2:	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$		(Verteilung von $\rightarrow$)
Ax3:	$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$		(Kontraposition)
Ax4:	$\forall x A \rightarrow \{x/t\}(A)$	$\{x/t\}$ kollisionsfrei für A	(Instantiierung)
Ax5:	$\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$	$x \not\in Frei(A)$	($\forall$-Verschiebung)

Mp: $$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$$ (Modus ponens)

Gen: $$\frac{A}{\forall x A}$$ (Generalisierung)

Vollständigkeit der PL1
GÖDEL 1931

Theorem

Σ sei eine Signatur der PL1.
Dann ist **H** *über Σ korrekt und vollständig: für alle $M \subseteq For_\Sigma$, $A \in For_\Sigma$ gilt:*

$$M \models A \iff M \vdash_{\mathbf{H}} A$$

Konsequenzen der Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem (Kompaktheitsatz)

Für beliebige $M \subseteq For_\Sigma$, $A \in For_\Sigma$ gilt:

$$M \models A$$
$$\Leftrightarrow$$
$$E \models A \text{ für eine endliche Teilmenge } E \subseteq M.$$

Theorem (Endlichkeitssatz)

Eine Menge $M \subseteq For_\Sigma$ hat genau dann ein Modell, wenn jede endliche Teilmenge von M ein Modell hat.

Der Endlichkeitssatz ist der Spezialfall $A = \mathbf{0}$ des Kompaktheitssatzes.

Konsequenzen der Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem (Kompaktheitsatz)

Für beliebige $M \subseteq For_\Sigma$, $A \in For_\Sigma$ gilt:

$$M \models A$$
$$\Leftrightarrow$$
$$E \models A \textit{ für eine endliche Teilmenge } E \subseteq M.$$

Theorem (Endlichkeitssatz)

Eine Menge $M \subseteq For_\Sigma$ hat genau dann ein Modell, wenn jede endliche Teilmenge von M ein Modell hat.

Der Endlichkeitssatz ist der Spezialfall $A = \mathbf{0}$ des Kompaktheitssatzes.

Konsequenzen der Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem (Kompaktheitsatz)

Für beliebige $M \subseteq For_\Sigma$, $A \in For_\Sigma$ *gilt:*

$$M \models A$$
$$\Leftrightarrow$$
$$E \models A \textit{ für eine endliche Teilmenge } E \subseteq M.$$

Theorem (Endlichkeitssatz)

Eine Menge $M \subseteq For_\Sigma$ *hat genau dann ein Modell, wenn jede endliche Teilmenge von* M *ein Modell hat.*

Der Endlichkeitssatz ist der Spezialfall $A = \mathbf{0}$ des Kompaktheitssatzes.

Beweis des Kompaktheitsatzes

$$
\begin{array}{lllll}
 & M & \models & A & \\[1em]
\Leftrightarrow & M & \vdash & A & \text{(Korrektheit und Vollständigkeit)} \\[1em]
\Leftrightarrow & E & \vdash & A & \text{für ein endliches } E \subseteq M \\
 & & & & \text{ Endlichkeit von Ableitungen} \\[1em]
\Leftrightarrow & E & \models & A & \text{für ein endliches } E \subseteq M \\[1em]
 & & & & \text{Korrektheit u. Vollständigkeit}
\end{array}
$$

Beweis des Kompaktheitsatzes

$$
\begin{array}{rllll}
 & M & \models & A & \\
\Leftrightarrow & M & \vdash & A & \text{(Korrektheit und Vollständigkeit)} \\
\Leftrightarrow & E & \vdash & A & \text{für ein endliches } E \subseteq M \\
 & & & & \text{ Endlichkeit von Ableitungen} \\
\Leftrightarrow & E & \models & A & \text{für ein endliches } E \subseteq M \\
 & & & & \\
 & & & & \text{Korrektheit u. Vollständigkeit}
\end{array}
$$

Beweis des Kompaktheitsatzes

$$
\begin{array}{llll}
 & M & \models & A \\
\Leftrightarrow & M & \vdash & A \quad \text{(Korrektheit und Vollständigkeit)} \\
\Leftrightarrow & E & \vdash & A \quad \text{für ein endliches } E \subseteq M \\
 & & & \quad \text{Endlichkeit von Ableitungen} \\
\Leftrightarrow & E & \models & A \quad \text{für ein endliches } E \subseteq M \\
 & & & \quad \text{Korrektheit u. Vollständigkeit}
\end{array}
$$

Beweis des Kompaktheitsatzes

$$
\begin{array}{ccccl}
 & M & \models & A & \\
\Leftrightarrow & M & \vdash & A & \text{(Korrektheit und Vollständigkeit)} \\
\Leftrightarrow & E & \vdash & A & \text{für ein endliches } E \subseteq M \\
 & & & & \quad \text{Endlichkeit von Ableitungen} \\
\Leftrightarrow & E & \models & A & \text{für ein endliches } E \subseteq M \\
 & & & & \text{Korrektheit u. Vollständigkeit}
\end{array}
$$

Beweis des Kompaktheitsatzes

$$M \models A$$

$\Leftrightarrow \quad M \vdash A$ (Korrektheit und Vollständigkeit)

$\Leftrightarrow \quad E \vdash A$ für ein endliches $E \subseteq M$
Endlichkeit von Ableitungen

$\Leftrightarrow \quad E \models A$ für ein endliches $E \subseteq M$

Korrektheit u. Vollständigkeit

Beweis des Kompaktheitsatzes

$$
\begin{array}{llll}
 & M & \models & A \\[1em]
\Leftrightarrow & M & \vdash & A \quad \text{(Korrektheit und Vollständigkeit)} \\[1em]
\Leftrightarrow & E & \vdash & A \quad \text{für ein endliches } E \subseteq M \\
 & & & \quad \text{Endlichkeit von Ableitungen} \\[1em]
\Leftrightarrow & E & \models & A \quad \text{für ein endliches } E \subseteq M
\end{array}
$$

Korrektheit u. Vollständigkeit

Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe

Theorem

Es gibt keine Formel F der Prädikatenlogik erster Stufe, so daß für alle Strukturen $\mathcal{M}$ gilt:

$$\mathcal{M} \models F \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \text{ ist endlich.}$$

Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe

Theorem

*Es gibt **keine** Formel F der Prädikatenlogik erster Stufe, so daß für alle Strukturen $\mathcal{M}$ gilt:*

$$\mathcal{M} \models F \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \text{ ist endlich.}$$

Beweis: Angenommen ein solches F existiert.
Wir definieren Hilfsformeln: $A_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i<j\leq n} \neg(x_i \doteq x_j)$

Offensichtlich gilt
$\mathcal{M} \models A_n \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}$ hat mindestens n Elemente.
Jede endliche Teilmenge von

$$\Gamma = \{F\} \cup \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ist erfüllbar, aber Γ selbst ist nicht erfüllbar.
Widerspruch zum Endlichkeitssatz!

Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe

Theorem

Es gibt keine Formel F der Prädikatenlogik erster Stufe, so daß für alle Strukturen $\mathcal{M}$ gilt:

$$\mathcal{M} \models F \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \text{ ist endlich.}$$

Beweis: Angenommen ein solches F existiert.
Wir definieren Hilfsformeln: $A_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i<j\leq n} \neg(x_i \doteq x_j)$

Offensichtlich gilt
$\mathcal{M} \models A_n \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}$ hat mindestens n Elemente.
Jede endliche Teilmenge von

$$\Gamma = \{F\} \cup \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ist erfüllbar, aber Γ selbst ist nicht erfüllbar.
Widerspruch zum Endlichkeitssatz!

Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe

Theorem

Es gibt keine Formel F der Prädikatenlogik erster Stufe, so daß für alle Strukturen $\mathcal{M}$ gilt:

$$\mathcal{M} \models F \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \text{ ist endlich.}$$

Beweis: Angenommen ein solches F existiert.

Wir definieren Hilfsformeln: $A_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i<j\leq n} \neg(x_i \doteq x_j)$

Offensichtlich gilt
$\mathcal{M} \models A_n \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}$ hat mindestens n Elemente.
Jede endliche Teilmenge von

$$\Gamma = \{F\} \cup \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ist erfüllbar, aber Γ selbst ist nicht erfüllbar.
Widerspruch zum Endlichkeitssatz!

Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe

Karlsruhe Institute of Technology

Theorem

Es gibt keine Formel F der Prädikatenlogik erster Stufe, so daß für alle Strukturen $\mathcal{M}$ gilt:

$$\mathcal{M} \models F \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \text{ ist endlich.}$$

Beweis: Angenommen ein solches F existiert.

Wir definieren Hilfsformeln: $A_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i<j\leq n} \neg(x_i \doteq x_j)$

Offensichtlich gilt

$\mathcal{M} \models A_n \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}$ hat mindestens n Elemente.

Jede endliche Teilmenge von

$$\Gamma = \{F\} \cup \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ist erfüllbar, aber Γ selbst ist nicht erfüllbar.

Widerspruch zum Endlichkeitssatz!

Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe

Theorem

Es gibt keine Formel F der Prädikatenlogik erster Stufe, so daß für alle Strukturen $\mathcal{M}$ gilt:

$$\mathcal{M} \models F \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \textit{ ist endlich.}$$

Beweis: Angenommen ein solches F existiert.
Wir definieren Hilfsformeln: $A_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i<j\leq n} \neg(x_i \doteq x_j)$

Offensichtlich gilt
$\mathcal{M} \models A_n \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}$ hat mindestens n Elemente.
Jede endliche Teilmenge von

$$\Gamma = \{F\} \cup \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ist erfüllbar, aber Γ selbst ist nicht erfüllbar.
Widerspruch zum Endlichkeitssatz!

Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe

Karlsruhe Institute of Technology

Theorem

Es gibt keine Formel F der Prädikatenlogik erster Stufe, so daß für alle Strukturen $\mathcal{M}$ gilt:

$$\mathcal{M} \models F \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \text{ ist endlich.}$$

Beweis: Angenommen ein solches F existiert.
Wir definieren Hilfsformeln: $A_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i<j\leq n} \neg(x_i \doteq x_j)$

Offensichtlich gilt
$\mathcal{M} \models A_n \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}$ hat mindestens n Elemente.
Jede endliche Teilmenge von

$$\Gamma = \{F\} \cup \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ist erfüllbar, aber Γ selbst ist nicht erfüllbar.
Widerspruch zum Endlichkeitssatz!

Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe

Theorem

Es gibt keine Formel F der Prädikatenlogik erster Stufe, so daß für alle Strukturen $\mathcal{M}$ gilt:

$$\mathcal{M} \models F \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \textit{ ist endlich.}$$

Beweis: Angenommen ein solches F existiert.
Wir definieren Hilfsformeln: $A_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i<j\leq n} \neg(x_i \doteq x_j)$

Offensichtlich gilt
$\mathcal{M} \models A_n \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}$ hat mindestens n Elemente.
Jede endliche Teilmenge von

$$\Gamma = \{F\} \cup \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ist erfüllbar, aber Γ selbst ist nicht erfüllbar.
Widerspruch zum Endlichkeitssatz!