

Formale Systeme

Prädikatenlogik 2. Stufe

Prof. Dr. Bernhard Beckert | WS 2010/2011

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Logische Zeichen:

Wie in der PL1: $(,), \dot{=} , \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.

Variable:

$Var = Ivar \cup Mvar$ (disjunkt)

Ivar: Individuenvariable v_0, v_1, \dots

Notation: x, y, z, \dots

Mvar: Mengenvariable oder
einstellige Prädikatvariable M_0, M_1, \dots

Notation: X, Y, Z, \dots

Signatur $\Sigma = (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma)$ wie in PL1

Terme $Term_\Sigma$ wie in PL1

Logische Zeichen:

Wie in der PL1: $(,), \dot{=} , \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.

Variable:

$Var = Ivar \cup Mvar$ (disjunkt)

Ivar: Individuenvariable v_0, v_1, \dots

Notation: x, y, z, \dots

Mvar: Mengenvariable oder
einstellige Prädikatvariable M_0, M_1, \dots

Notation: X, Y, Z, \dots

Signatur $\Sigma = (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma)$ wie in PL1

Terme $Term_\Sigma$ wie in PL1

Logische Zeichen:

Wie in der PL1: $(,), \dot{=} , \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.

Variable:

$Var = Ivar \cup Mvar$ (disjunkt)

Ivar: Individuenvariable v_0, v_1, \dots

Notation: x, y, z, \dots

Mvar: Mengenvariable oder
einstellige Prädikatvariable M_0, M_1, \dots

Notation: X, Y, Z, \dots

Signatur $\Sigma = (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma)$ wie in PL1

Terme $Term_\Sigma$ wie in PL1

Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe (Forts.)

atomare Formeln:

$s \doteq t$ für Terme s, t

$p(t_1, \dots, t_n)$ für $p \in P_\Sigma$, $\alpha_\Sigma(p) = n$, $t_i \in \text{Term}_\Sigma$

$X(t)$ für Mengenvariable X und Terme t

Formeln For_Σ^2 enthält genau

- alle atomaren Formeln
- **1, 0**
- mit $A, B \in For_\Sigma^2$, $x \in Ivar$, $X \in Mvar$
auch: $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$,
 $\forall xA$, $\exists xA$, $\forall XA$, $\exists XA$

Die Begriffe „freie Variable“, „gebundene Variable“, „Substitution“, „kollisionsfreie Substitution“, „Präfix“, „Allabschluß“, „Existenzabschluß“ u.ä. werden entsprechend

Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe (Forts.)

atomare Formeln:

$s \doteq t$ für Terme s, t

$p(t_1, \dots, t_n)$ für $p \in P_\Sigma$, $\alpha_\Sigma(p) = n$, $t_i \in \text{Term}_\Sigma$

$X(t)$ für Mengenvariable X und Terme t

Formeln For_Σ^2 enthält genau

- alle atomaren Formeln
- $1, 0$
- mit $A, B \in For_\Sigma^2$, $x \in Ivar$, $X \in Mvar$
auch: $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$,
 $\forall xA$, $\exists xA$, $\forall XA$, $\exists XA$

Die Begriffe „freie Variable“, „gebundene Variable“, „Substitution“, „kollisionsfreie Substitution“, „Präfix“, „Allabschluß“, „Existenzabschluß“ u.ä. werden entsprechend

Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe (Forts.)

atomare Formeln:

$s \doteq t$ für Terme s, t

$p(t_1, \dots, t_n)$ für $p \in P_\Sigma$, $\alpha_\Sigma(p) = n$, $t_i \in \text{Term}_\Sigma$

$X(t)$ für Mengenvariable X und Terme t

Formeln For_Σ^2 enthält genau

- alle atomaren Formeln
- **1, 0**
- mit $A, B \in For_\Sigma^2$, $x \in Ivar$, $X \in Mvar$
auch: $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$,
 $\forall xA$, $\exists xA$, $\forall XA$, $\exists XA$

Die Begriffe „freie Variable“, „gebundene Variable“, „Substitution“, „kollisionsfreie Substitution“, „Präfix“, „Allabschluß“, „Existenzabschluß“ u.ä. werden entsprechend

Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe (Forts.)

atomare Formeln:

$s \doteq t$ für Terme s, t

$p(t_1, \dots, t_n)$ für $p \in P_\Sigma$, $\alpha_\Sigma(p) = n$, $t_i \in \text{Term}_\Sigma$

$X(t)$ für Mengenvariable X und Terme t

Formeln For_Σ^2 enthält genau

- alle atomaren Formeln

- 1, 0**

- mit $A, B \in For_\Sigma^2$, $x \in Ivar$, $X \in Mvar$

auch: $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$,

$\forall xA$, $\exists xA$, $\forall XA$, $\exists XA$

Die Begriffe „freie Variable“, „gebundene Variable“, „Substitution“, „kollisionsfreie Substitution“, „Präfix“, „Allabschluß“, „Existenzabschluß“ u.ä. werden entsprechend

Semantik der Prädikatenlogik

2. Stufe

Zu einer Interpretation $\mathcal{D} = (D, I)$ sind Belegungen

$$\beta: Ivar \rightarrow D \quad \text{und} \quad \gamma: Mvar \rightarrow P(D)$$

zu betrachten ($P(D)$: Potenzmenge von D).

Auswertung von Formeln:

$$val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(X(t)) = W \Leftrightarrow val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(t) \in \gamma(X)$$

$$val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\forall XA) = W \Leftrightarrow \text{für jedes } M \subseteq D \text{ gilt } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W$$

$$val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\exists XA) = W \Leftrightarrow \text{es gibt } M \subseteq D \text{ mit } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W$$

Semantik der Prädikatenlogik

2. Stufe

Zu einer Interpretation $\mathcal{D} = (D, I)$ sind Belegungen

$$\beta: Ivar \rightarrow D \quad \text{und} \quad \gamma: Mvar \rightarrow P(D)$$

zu betrachten ($P(D)$: Potenzmenge von D).

Auswertung von Formeln:

$$val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(X(t)) = W \Leftrightarrow val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(t) \in \gamma(X)$$

$$val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\forall XA) = W \Leftrightarrow \text{für jedes } M \subseteq D \text{ gilt } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W$$

$$val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\exists XA) = W \Leftrightarrow \text{es gibt } M \subseteq D \text{ mit } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W$$

Semantik der Prädikatenlogik

2. Stufe

Zu einer Interpretation $\mathcal{D} = (D, I)$ sind Belegungen

$$\beta: Ivar \rightarrow D \quad \text{und} \quad \gamma: Mvar \rightarrow P(D)$$

zu betrachten ($P(D)$: Potenzmenge von D).

Auswertung von Formeln:

$$val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(X(t)) = W \Leftrightarrow val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(t) \in \gamma(X)$$

$$val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\forall XA) = W \Leftrightarrow \text{für jedes } M \subseteq D \text{ gilt } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W$$

$$val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\exists XA) = W \Leftrightarrow \text{es gibt } M \subseteq D \text{ mit } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W$$

Semantik der Prädikatenlogik

2. Stufe

Zu einer Interpretation $\mathcal{D} = (D, I)$ sind Belegungen

$$\beta: Ivar \rightarrow D \quad \text{und} \quad \gamma: Mvar \rightarrow P(D)$$

zu betrachten ($P(D)$: Potenzmenge von D).

Auswertung von Formeln:

$$val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(X(t)) = W \iff val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(t) \in \gamma(X)$$

$$val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\forall XA) = W \iff \text{für jedes } M \subseteq D \text{ gilt } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W$$

$$val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\exists XA) = W \iff \text{es gibt } M \subseteq D \text{ mit } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W$$

(D, I) heißt *Modell* von A : $\Leftrightarrow \text{val}_{D,I,\beta,\gamma}(A) = W$ für alle β, γ .

(D, I) ist Modell einer Formelmenge M : \Leftrightarrow

(D, I) ist Modell jeder Formel in M .

$M \models A$: \Leftrightarrow jedes Modell von M ist Modell von A

A allgemeingültig : $\Leftrightarrow \models A$

A erfüllbar : $\Leftrightarrow \neg A$ ist nicht allgemeingültig.

(D, I) heißt *Modell* von A : $\Leftrightarrow \text{val}_{D,I,\beta,\gamma}(A) = W$ für alle β, γ .

(D, I) ist Modell einer Formelmengende M : \Leftrightarrow

(D, I) ist Modell jeder Formel in M .

$M \models A$: \Leftrightarrow jedes Modell von M ist Modell von A

A allgemeingültig : $\Leftrightarrow \models A$

A erfüllbar : $\Leftrightarrow \neg A$ ist nicht allgemeingültig.

(D, I) heißt *Modell* von A : $\Leftrightarrow \text{val}_{D,I,\beta,\gamma}(A) = W$ für alle β, γ .

(D, I) ist Modell einer Formelmenge M : \Leftrightarrow

(D, I) ist Modell jeder Formel in M .

$M \models A$: \Leftrightarrow jedes Modell von M ist Modell von A

A *allgemeingültig* : $\Leftrightarrow \models A$

A *erfüllbar* : $\Leftrightarrow \neg A$ ist nicht allgemeingültig.

(D, I) heißt *Modell* von A : $\Leftrightarrow \text{val}_{D,I,\beta,\gamma}(A) = W$ für alle β, γ .

(D, I) ist Modell einer Formelmengemenge M : \Leftrightarrow

(D, I) ist Modell jeder Formel in M .

$M \models A$: \Leftrightarrow jedes Modell von M ist Modell von A

A *allgemeingültig* : $\Leftrightarrow \models A$

A *erfüllbar* : $\Leftrightarrow \neg A$ ist nicht allgemeingültig.

(D, I) heißt *Modell* von A : $\Leftrightarrow \text{val}_{D,I,\beta,\gamma}(A) = W$ für alle β, γ .

(D, I) ist Modell einer Formelmengende M : \Leftrightarrow

(D, I) ist Modell jeder Formel in M .

$M \models A$: \Leftrightarrow jedes Modell von M ist Modell von A

A allgemeingültig : $\Leftrightarrow \models A$

A erfüllbar : $\Leftrightarrow \neg A$ ist nicht allgemeingültig.

- $\forall X(X(x) \leftrightarrow X(y))$
Charakterisiert die Gleichheit $x \doteq y$.
- $\forall X((X(0) \wedge \forall y(X(y) \rightarrow X(s(y)))) \rightarrow \forall yX(y))$
Das Induktionsschema der Peanoschen Axiome als Formel.

- $\forall X(X(x) \leftrightarrow X(y))$
Charakterisiert die Gleichheit $x \doteq y$.
- $\forall X((X(0) \wedge \forall y(X(y) \rightarrow X(s(y)))) \rightarrow \forall yX(y))$
Das Induktionsschema der Peanoschen Axiome als Formel.

Theorem

Die PL2 ist nicht kompakt. D. h.:

- *Es gibt eine Formelmengende S , so daß jede endliche Teilmenge von S ein Modell hat S selbst aber nicht.*

Beweis

Vokabular $\Sigma = \{s, 0, c\}$

$$S = \{ \forall X((X(0) \wedge \forall y(X(y) \rightarrow X(s(y)))) \rightarrow \forall yX(y)) \} \cup \\ \{ \neg(c \doteq \underbrace{s(\dots s(0)\dots)}_{n \text{ mal}}) \mid n \geq 0 \}$$

Aus $(D, I) = \mathcal{D} \models \forall X((X(0) \wedge \forall y(X(y) \rightarrow X(s(y)))) \rightarrow \forall yX(y))$
folgt $D = \{s^n(0) \mid n \geq 0\}$.

Jede endliche Teilmenge der Ungleichungen
 $\{c \neq s^n(0) \mid n \geq 0\}$ lässt sich noch erfüllen, die ganze Menge
aber nicht mehr.

Beweis

Vokabular $\Sigma = \{s, 0, c\}$

$$S = \{ \forall X((X(0) \wedge \forall y(X(y) \rightarrow X(s(y)))) \rightarrow \forall yX(y)) \} \cup \\ \{ \neg(c \doteq \underbrace{s(\dots s(0)\dots)}_{n \text{ mal}}) \mid n \geq 0 \}$$

Aus $(D, I) = \mathcal{D} \models \forall X((X(0) \wedge \forall y(X(y) \rightarrow X(s(y)))) \rightarrow \forall yX(y))$
folgt $D = \{s^n(0) \mid n \geq 0\}$.

Jede endliche Teilmenge der Ungleichungen
 $\{c \neq s^n(0) \mid n \geq 0\}$ lässt sich noch erfüllen, die ganze Menge
aber nicht mehr.

Beweis

Vokabular $\Sigma = \{s, 0, c\}$

$$S = \{ \forall X((X(0) \wedge \forall y(X(y) \rightarrow X(s(y)))) \rightarrow \forall yX(y)) \} \cup \\ \{ \neg(c \doteq \underbrace{s(\dots s(0)\dots)}_{n \text{ mal}}) \mid n \geq 0 \}$$

Aus $(D, I) = \mathcal{D} \models \forall X((X(0) \wedge \forall y(X(y) \rightarrow X(s(y)))) \rightarrow \forall yX(y))$
folgt $D = \{s^n(0) \mid n \geq 0\}$.

Jede endliche Teilmenge der Ungleichungen
 $\{c \neq s^n(0) \mid n \geq 0\}$ lässt sich noch erfüllen, die ganze Menge
aber nicht mehr.

Theorem

Für die Prädikatenlogik 2. Stufe kann es keinen korrekten und vollständigen Kalkül geben.

Beweis

Der Begriff der Ableitbarkeit aus einem Kalkül K ist stets kompakt, d. h.:

Aus

$$S \vdash_K A$$

folgt stets

$$E \vdash_K A$$

für eine endliche Teilmenge $E \subseteq S$.

Die Existenz eines korrekten und vollständigen Kalküls stünde also im Widerspruch zu dem Gegenbeispiel zur Kompaktheit von PL2.

Mit Quantoren über 2-stellige Relationen kann man auch die Endlichkeit des Grundbereichs durch eine Formel ohne nicht-logische Zeichen ausdrücken.

$$\begin{aligned} Fin & := \\ \forall U & ((\forall x \exists y U(x, y) \wedge \\ & \forall x \forall y \forall z (U(x, y) \wedge U(x, z) \rightarrow y \doteq z) \\ & \wedge \forall x \forall y \forall z (U(x, z) \wedge U(y, z) \rightarrow x \doteq y)) \\ & \rightarrow \forall y \exists x U(x, y)) \end{aligned}$$

$$(D, I) \models Fin \Leftrightarrow D \text{ ist endlich}$$

Beweisidee

(D, I) endlich

- \Leftrightarrow Jede injektive Funktion $F : D \rightarrow D$ ist auch surjektiv
- \Leftrightarrow Für jede Relation $R \subseteq D \times D$ gilt:
Wenn R der Graph einer injektiven Funktion ist,
dann ist diese auch surjektiv.