Karlsruhe Institute of Technology

Formale Systeme

Lineare Temporale Logik

Prof. Dr. Bernhard Beckert | WS 2010/2011

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Omega-Strukturen

Definition

Eine omega-Struktur $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ für eine aussagenlogische Signatur P besteht aus der geordneten Menge der natürlichen Zahlen

$$(\mathbb{N}, <)$$

interpretiert als Menge abstrakter Zeitpunkte und einer Funktion

$$\xi : \mathbb{N} \to 2^P$$

mit der Intention

$$p \in \xi(n) \Leftrightarrow \text{ in } \mathcal{R} \text{ ist } p \text{ zum Zeitpunkt } n \text{ wahr}$$

ξ_n steht für das bei n beginnende Endstück von ξ:

$$\xi_n(m) = \xi(n+m) \qquad \text{insbes. } \xi_0 = \xi$$

Omega-Strukturen

Definition

Eine omega-Struktur $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ für eine aussagenlogische Signatur P besteht aus der geordneten Menge der natürlichen Zahlen

$$(\mathbb{N}, <)$$

interpretiert als Menge abstrakter Zeitpunkte und einer Funktion

$$\xi : \mathbb{N} \to 2^P$$

mit der Intention

$$p \in \xi(n) \Leftrightarrow \text{ in } \mathcal{R} \text{ ist } p \text{ zum Zeitpunkt } n \text{ wahr}$$

ξ_n steht für das bei n beginnende Endstück von ξ:

$$\xi_n(m) = \xi(n+m) \qquad \text{insbes. } \xi_0 = \xi$$

LTL-Formeln: *LTLFor*

Definition

Σ eine Menge aller AL-Atome. *LTLFor* wird definiert durch

1. $\Sigma \subseteq LTLFor$
2. $\mathbf{1}, \mathbf{0} \in LTLFor$
3. Liegen A, B in *LTLFor*, dann auch alle aussagenlogischen Kombinationen von A und B.
4. für $A, B \in LTLFor$ gilt auch
    1. $\Box A \in LTLFor$ und
    2. $\Diamond B \in LTLFor$ und
    3. $A\ \mathbf{U}\ B \in LTLFor$
    4. $X\ A$

Die Symbole $\Box$, $\Diamond$, X und $\mathbf{U}$ heißen temporale Modaloperatoren.

LTL-Formeln: *LTLFor*

Definition

Σ eine Menge aller AL-Atome. *LTLFor* wird definiert durch

1. $\Sigma \subseteq \mathit{LTLFor}$
2. $\mathbf{1}, \mathbf{0} \in \mathit{LTLFor}$
3. Liegen A, B in *LTLFor*, dann auch alle aussagenlogischen Kombinationen von A und B.
4. für $A, B \in \mathit{LTLFor}$ gilt auch
   1. $\Box A \in \mathit{LTLFor}$ und
   2. $\Diamond B \in \mathit{LTLFor}$ und
   3. $A\ \mathbf{U}\ B \in \mathit{LTLFor}$
   4. $X\ A$

Die Symbole $\Box$, $\Diamond$, X und $\mathbf{U}$ heißen temporale Modaloperatoren.

LTL-Formeln: *LTLFor*

Definition

Σ eine Menge aller AL-Atome. *LTLFor* wird definiert durch

1. $\Sigma \subseteq \mathit{LTLFor}$
2. $\mathbf{1}, \mathbf{0} \in \mathit{LTLFor}$
3. Liegen A, B in *LTLFor*, dann auch alle aussagenlogischen Kombinationen von A und B.
4. für $A, B \in \mathit{LTLFor}$ gilt auch
   1. $\Box A \in \mathit{LTLFor}$ und
   2. $\Diamond B \in \mathit{LTLFor}$ und
   3. $A\ \mathbf{U}\ B \in \mathit{LTLFor}$
   4. $X\ A$

Die Symbole $\Box$, $\Diamond$, X und $\mathbf{U}$ heißen temporale Modaloperatoren.

LTL-Formeln: *LTLFor*

Definition

Σ eine Menge aller AL-Atome. *LTLFor* wird definiert durch

1. $\Sigma \subseteq LTLFor$
2. $\mathbf{1}, \mathbf{0} \in LTLFor$
3. Liegen A, B in *LTLFor*, dann auch alle aussagenlogischen Kombinationen von A und B.
4. für $A, B \in LTLFor$ gilt auch
   1. $\Box A \in LTLFor$ und
   2. $\Diamond B \in LTLFor$ und
   3. $A \mathbf{U} B \in LTLFor$
   4. $X\ A$

Die Symbole $\Box$, $\Diamond$, X und $\mathbf{U}$ heißen temporale Modaloperatoren.

LTL-Formeln: *LTLFor*

Definition

Σ eine Menge aller AL-Atome. *LTLFor* wird definiert durch

1. $\Sigma \subseteq \mathit{LTLFor}$
2. $\mathbf{1}, \mathbf{0} \in \mathit{LTLFor}$
3. Liegen A, B in *LTLFor*, dann auch alle aussagenlogischen Kombinationen von A und B.
4. für $A, B \in \mathit{LTLFor}$ gilt auch
   1. $\Box A \in \mathit{LTLFor}$ und
   2. $\Diamond B \in \mathit{LTLFor}$ und
   3. $A \; \mathbf{U} \; B \in \mathit{LTLFor}$
   4. $X \; A$

Die Symbole $\Box$, $\Diamond$, X und $\mathbf{U}$ heißen temporale Modaloperatoren.

LTL-Formeln: *LTLFor*

Definition

Σ eine Menge aller AL-Atome. *LTLFor* wird definiert durch

1. $\Sigma \subseteq LTLFor$
2. $\mathbf{1}, \mathbf{0} \in LTLFor$
3. Liegen A, B in *LTLFor*, dann auch alle aussagenlogischen Kombinationen von A und B.
4. für $A, B \in LTLFor$ gilt auch
   1. $\Box A \in LTLFor$ und
   2. $\Diamond B \in LTLFor$ und
   3. $A \; \mathbf{U} \; B \in LTLFor$
   4. $X \; A$

Die Symbole $\Box$, $\Diamond$, X und $\mathbf{U}$ heißen temporale Modaloperatoren.

LTL-Formeln: *LTLFor*

Definition

Σ eine Menge aller AL-Atome. *LTLFor* wird definiert durch

1. $\Sigma \subseteq LTLFor$
2. $\mathbf{1}, \mathbf{0} \in LTLFor$
3. Liegen A, B in *LTLFor*, dann auch alle aussagenlogischen Kombinationen von A und B.
4. für $A, B \in LTLFor$ gilt auch
   1. $\Box A \in LTLFor$ und
   2. $\Diamond B \in LTLFor$ und
   3. $A\ \mathbf{U}\ B \in LTLFor$
   4. $X\ A$

Die Symbole $\Box$, $\Diamond$, X und $\mathbf{U}$ heißen temporale Modaloperatoren.

LTL-Formeln: *LTLFor*

Definition

Σ eine Menge aller AL-Atome. *LTLFor* wird definiert durch

1. $\Sigma \subseteq \mathit{LTLFor}$
2. $\mathbf{1}, \mathbf{0} \in \mathit{LTLFor}$
3. Liegen A, B in *LTLFor*, dann auch alle aussagenlogischen Kombinationen von A und B.
4. für $A, B \in \mathit{LTLFor}$ gilt auch
   1. $\Box A \in \mathit{LTLFor}$ und
   2. $\Diamond B \in \mathit{LTLFor}$ und
   3. $A \ \mathbf{U} \ B \in \mathit{LTLFor}$
   4. $X \ A$

Die Symbole $\Box$, $\Diamond$, X und $\mathbf{U}$ heißen temporale Modaloperatoren.

LTL-Formeln: *LTLFor*

Definition

Σ eine Menge aller AL-Atome. *LTLFor* wird definiert durch

1. $\Sigma \subseteq LTLFor$
2. $\mathbf{1}, \mathbf{0} \in LTLFor$
3. Liegen A, B in *LTLFor*, dann auch alle aussagenlogischen Kombinationen von A und B.
4. für $A, B \in LTLFor$ gilt auch
   1. $\Box A \in LTLFor$ und
   2. $\Diamond B \in LTLFor$ und
   3. $A \ \mathbf{U} \ B \in LTLFor$
   4. $X \ A$

Die Symbole $\Box$, $\Diamond$, X und $\mathbf{U}$ heißen temporale Modaloperatoren.

LTL-Formeln: *LTLFor*

Definition

Σ eine Menge aller AL-Atome. *LTLFor* wird definiert durch

1. $\Sigma \subseteq LTLFor$
2. $\mathbf{1}, \mathbf{0} \in LTLFor$
3. Liegen A, B in *LTLFor*, dann auch alle aussagenlogischen Kombinationen von A und B.
4. für $A, B \in LTLFor$ gilt auch
   1. $\Box A \in LTLFor$ und
   2. $\Diamond B \in LTLFor$ und
   3. $A \ \mathbf{U} \ B \in LTLFor$
   4. $X \ A$

Die Symbole $\Box$, $\Diamond$, X und $\mathbf{U}$ heißen temporale Modaloperatoren.

LTL-Semantik

Definition

Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ eine omega-Struktur und *A* eine *LTL* Formel.

LTL-Semantik

Definition

Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ eine omega-Struktur und *A* eine *LTL* Formel.

$\xi \models p$ gdw $p \in \xi(0)$ (p ein AL Atom)

LTL-Semantik

Definition

Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ eine omega-Struktur und A eine *LTL* Formel.

$\xi \models p$	gdw	$p \in \xi(0)$ (p ein AL Atom)
$\xi \models op(A, B)$	gdw	für AL-Kombinationen $op(A, B)$ von A und B wie üblich

LTL-Semantik

Definition

Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ eine omega-Struktur und A eine *LTL* Formel.

$\xi \models p$	gdw	$p \in \xi(0)$ (p ein AL Atom)
$\xi \models op(A, B)$	gdw	für AL-Kombinationen $op(A, B)$ von A und B wie üblich
$\xi \models \Box A$	gdw	für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\xi_n \models A$

LTL-Semantik

Definition

Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ eine omega-Struktur und A eine *LTL* Formel.

$\xi \models p$	gdw	$p \in \xi(0)$ (p ein AL Atom)
$\xi \models op(A, B)$	gdw	für AL-Kombinationen $op(A, B)$ von A und B wie üblich
$\xi \models \Box A$	gdw	für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\xi_n \models A$
$\xi \models \Diamond A$	gdw	es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\xi_n \models A$

LTL-Semantik

Definition

Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ eine omega-Struktur und A eine *LTL* Formel.

$\xi \models p$	gdw	$p \in \xi(0)$ (p ein AL Atom)
$\xi \models op(A, B)$	gdw	für AL-Kombinationen $op(A, B)$ von A und B wie üblich
$\xi \models \Box A$	gdw	für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\xi_n \models A$
$\xi \models \Diamond A$	gdw	es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\xi_n \models A$
$\xi \models A\ \mathbf{U}\ B$	gdw	es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\xi_n \models B$ und für alle m mit $0 \leq m < n$ gilt $\xi_m \models A$

LTL-Semantik

Definition

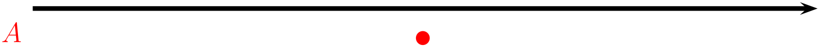
Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ eine omega-Struktur und A eine *LTL* Formel.

$\xi \models p$	gdw	$p \in \xi(0)$ (p ein AL Atom)
$\xi \models op(A, B)$	gdw	für AL-Kombinationen $op(A, B)$ von A und B wie üblich
$\xi \models \Box A$	gdw	für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\xi_n \models A$
$\xi \models \Diamond A$	gdw	es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\xi_n \models A$
$\xi \models A \mathbf{U} B$	gdw	es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\xi_n \models B$ und für alle m mit $0 \leq m < n$ gilt $\xi_m \models A$
$\xi \models X A$	gdw	$\xi_1 \models A$

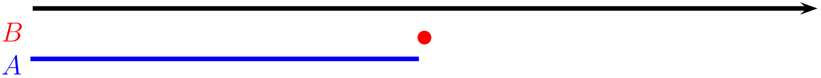
Visualisierung der LTL-Semantik

Szenarium für $\Box A$

Szenarium für $\Diamond A$



Szenarium für $A \; \mathbf{U} \; B$



Reduktion auf U und 1

$$\Diamond A \leftrightarrow \quad \mathbf{1}\ \mathbf{U}\ A$$
$$\Box A \leftrightarrow \neg(\mathbf{1}\ \mathbf{U}\ \neg A)$$

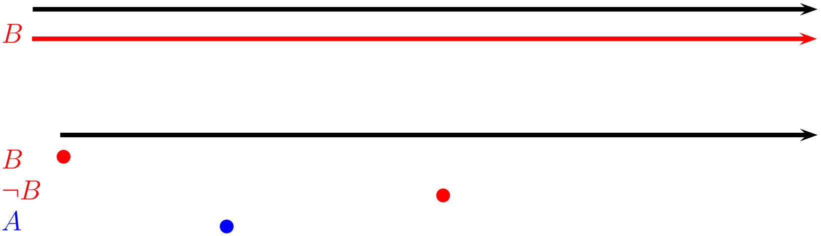
Zusätzliche Operatoren

$\xi \models A\,\mathbf{U}_w\,B$ gdw für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\xi_n \models (A \wedge \neg B)$ oder
es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\xi_n \models B$ und
für alle m mit $0 \leq m < n$ gilt $\xi_m \models A$

$\xi \models A\,\mathbf{V}\,B$ gdw $\xi \models B$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
falls $\xi_n \models \neg B$ dann gibt es ein m mit
$0 \leq m < n$ und $\xi_m \models A$

Visualisierung von V

Szenarien für $A \mathbf{V} B$



Lemma

1. $A\,\mathbf{U}\,B \leftrightarrow (A\,\mathbf{U}_w\,B) \land \Diamond B$
2. $A\,\mathbf{U}_w\,B \leftrightarrow A\,\mathbf{U}\,B \lor \Box(A \land \neg B)$
3. $A\,\mathbf{V}\,B \leftrightarrow \neg(\neg A\,\mathbf{U}\,\neg B)$
4. $A\,\mathbf{U}\,B \leftrightarrow (B \lor (A \land X\,(A\,\mathbf{U}\,B)))$
5. $A\,\mathbf{V}\,B \leftrightarrow (B \land A) \lor (B \land X\,(A\,\mathbf{V}\,B))$

Lemma

1. $A \, \mathbf{U} \, B \leftrightarrow (A \, \mathbf{U}_w \, B) \land \Diamond B$
2. $A \, \mathbf{U}_w \, B \leftrightarrow A \, \mathbf{U} \, B \lor \Box(A \land \neg B)$
3. $A \, \mathbf{V} \, B \leftrightarrow \neg(\neg A \, \mathbf{U} \, \neg B)$
4. $A \, \mathbf{U} \, B \leftrightarrow (B \lor (A \land X \, (A \, \mathbf{U} \, B)))$
5. $A \, \mathbf{V} \, B \leftrightarrow (B \land A) \lor (B \land X \, (A \, \mathbf{V} \, B))$

Lemma

1. $A\ \mathbf{U}\ B \leftrightarrow (A\ \mathbf{U}_w\ B) \wedge \Diamond B$
2. $A\ \mathbf{U}_w\ B \leftrightarrow A\ \mathbf{U}\ B \vee \Box(A \wedge \neg B)$
3. $A\ \mathbf{V}\ B \leftrightarrow \neg(\neg A\ \mathbf{U}\ \neg B)$
4. $A\ \mathbf{U}\ B \leftrightarrow (B \vee (A \wedge X\ (A\ \mathbf{U}\ B)))$
5. $A\ \mathbf{V}\ B \leftrightarrow (B \wedge A) \vee (B \wedge X\ (A\ \mathbf{V}\ B))$

Lemma

1. $A \mathbf{U} B \leftrightarrow (A \mathbf{U}_w B) \wedge \Diamond B$
2. $A \mathbf{U}_w B \leftrightarrow A \mathbf{U} B \vee \Box(A \wedge \neg B)$
3. $A \mathbf{V} B \leftrightarrow \neg(\neg A \mathbf{U} \neg B)$
4. $A \mathbf{U} B \leftrightarrow (B \vee (A \wedge X (A \mathbf{U} B)))$
5. $A \mathbf{V} B \leftrightarrow (B \wedge A) \vee (B \wedge X (A \mathbf{V} B))$

Lemma

1. $A \mathbf{U} B \leftrightarrow (A \mathbf{U}_w B) \wedge \Diamond B$
2. $A \mathbf{U}_w B \leftrightarrow A \mathbf{U} B \vee \Box(A \wedge \neg B)$
3. $A \mathbf{V} B \leftrightarrow \neg(\neg A \mathbf{U} \neg B)$
4. $A \mathbf{U} B \leftrightarrow (B \vee (A \wedge X (A \mathbf{U} B)))$
5. $A \mathbf{V} B \leftrightarrow (B \wedge A) \vee (B \wedge X (A \mathbf{V} B))$

Beispiel

Sei p ein aussagenlogisches Atom.
Gesucht ist eine LTL-Formel A_{2p}, so daß für jedes ξ gilt

$$\xi \models A_{2p} \quad \text{gdw} \quad (n \text{ ist gerade} \Leftrightarrow p \in \xi(n))$$

$$A_{2p} = p \land X \neg p \land \Box(p \leftrightarrow XX\, p)$$

Erstaunlicherweise gibt es keine LTL-Formel A mit

$$\xi \models A \quad \text{gdw} \quad (n \text{ ist gerade} \Rightarrow p \in \xi(n))$$

Beispiel

Sei p ein aussagenlogisches Atom.
Gesucht ist eine LTL-Formel A_{2p}, so daß für jedes ξ gilt

$$\xi \models A_{2p} \quad \text{gdw} \quad (n \text{ ist gerade} \Leftrightarrow p \in \xi(n))$$

$$A_{2p} = p \land X\,\neg p \land \Box(p \leftrightarrow XX\,p)$$

Erstaunlicherweise gibt es keine LTL-Formel A mit

$$\xi \models A \quad \text{gdw} \quad (n \text{ ist gerade} \Rightarrow p \in \xi(n))$$

Beispiel

Sei p ein aussagenlogisches Atom.
Gesucht ist eine LTL-Formel A_{2p}, so daß für jedes ξ gilt

$$\xi \models A_{2p} \quad \text{gdw} \quad (n \text{ ist gerade} \Leftrightarrow p \in \xi(n))$$

$$A_{2p} = p \wedge X \neg p \wedge \Box(p \leftrightarrow XX\ p)$$

Erstaunlicherweise gibt es keine LTL-Formel A mit

$$\xi \models A \quad \text{gdw} \quad (n \text{ ist gerade} \Rightarrow p \in \xi(n))$$

Beispiele aus Mustersammlungen

```
REQUIREMENT: When a connection is not made to the s
    report an error and reset network component to
    initial state.
REFINEMENT: After OpeningNetworkConnection, an
   ErrorMessage will pop up in response to a Networ
PATTERN: Response
SCOPE: After
PARAMETERS: Propositional
LTL:  [](OpenNetworkConnection ->
          [](NetworkError -> <>ErrorMessage))
SOURCE: Jeff Isom \cite{isom:98}
DOMAIN: GUI
```

Beispiele aus Mustersammlungen

```
REQUIREMENT: When a connection is made to the SMTP
   server, all queued messages in the OutBox mail
   will be transferred to the server.
REFINEMENT: Before QueuedMailSent, SMTPServerConnec
PATTERN: Existence
SCOPE: Before
AlTERNATE: Global Precedence
PARAMETERS: Propositional
LTL:  <>QueuedMailSent ->
           (!QueuedMailSent U SMTPServerConnected)
SOURCE: Jeff Isom \cite{isom:98}
DOMAIN: GUI
```