Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Thorsten Bormer

Formale Systeme, WS 2010/2011

Übungsblatt 1

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 29.10.2010 besprochen.

Aufgabe 0

Melden Sie sich bei Twitter an (unter `http://www.twitter.com/signup`) und machen sich mit den Funktionen der Anwendung vertraut. Eine kurze Einführung finden Sie im Twitter Help Center. Bitte beachten Sie, dass es einige Tage dauern kann, bis ein neu ersteller Account und die dazu gehörigen Beiträge in der Suche erscheinen.

Für die Vorlesung wurde der Account `formaleSysteme` erstellt, dem Sie folgen können, um aktuelle Nachrichten die Vorlesung betreffend zu erhalten. Eigene vorlesungsrelevante Beiträge kennzeichnen Sie bitte durch den Hashtag `#FSysKIT`.

Aufgabe 1

Gegeben sei eine Landkarte mit L Ländern, die mit den Zahlen von 0 bis $L-1$ bezeichnet werden. Die binäre Relation $Na(i,j)$ trifft auf zwei Länder i und j zu ($0 \leq i,j < L$), wenn sie benachbart sind. Die Landkarte soll nun mit den **drei** Farben *rot*, *grün* und *blau* so eingefärbt werden, dass keine zwei benachbarten Länder dieselbe Farbe erhalten.

Geben Sie – in Abhängigkeit von L und Na – eine Menge F von aussagenlogischen Formeln an, so dass F genau dann erfüllbar ist, wenn eine Färbung der geforderten Art möglich ist.

Aufgabe 2

Wir betrachten eine Variante von Sudoku. Dabei müssen in das 9×9-Sudoku-Gitter die Zahlen von **0** bis 9 so eingetragen werden, dass

- in jeder der neun Spalten
- in jeder der neun Reihen
- und in jeder der neun Regionen

alle Zahlen einmal vorkommen. Für jede der neun Regionen existiert dazu ein besonderes Feld, in das *zwei* Zahlen eingetragen werden müssen. (Dieses Feld wird dabei für die vorliegende Aufgabe nicht vorgegeben, sondern soll aus dem Modell der erzeugten Formel abgelesen werden können.)

Formalisieren Sie die Regeln dieses Logikrätsels als ein Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik. Orientieren Sie sich dabei an der in der Vorlesung vorgestellten Formalisierung für Sudoku.

Aufgabe 3

Überprüfen Sie, ob folgende Formeln Tautologien sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $A \to ((A \to B) \to B)$ (b) $(A \to (A \to B)) \to B$

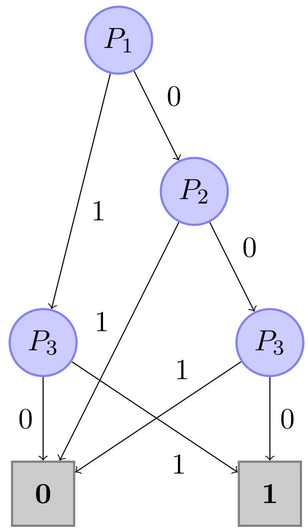

Abbildung 1: Shannon-Graph zu Aufgabe 7

Aufgabe 4

Gegeben sei die Formel

$$A = (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \ .$$

Zeigen Sie, dass die Normalformen

$$\begin{aligned} A' &= (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \\ A'' &= (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \end{aligned}$$

äquivalent zu A sind.

Aufgabe 5

Gegeben sei die Formel

$$F = (A \rightarrow (\neg B \wedge C)) \rightarrow D$$

und die Ordnung $A < B < C < D$ auf den aussagenlogischen Variablen.

(a) Erstellen Sie einen reduzierten Shannongraphen (BDD) für F.

(b) Geben Sie eine normierte sh-Formel an, die äquivalent ist zu F.

Aufgabe 6

Geben Sie eine normierte sh-Formel an, die äquivalent ist zu der sh-Formel

$$sh(P_3, P_2, P_1)$$

und die Ordnung $P_1 < P_2 < P_3$ auf den aussagenlogischen Variablen respektiert.

Aufgabe 7

Geben Sie zu dem in Abbildung 1 dargestellten Shannongraphen je eine äquivalente aussagenlogische Formel in

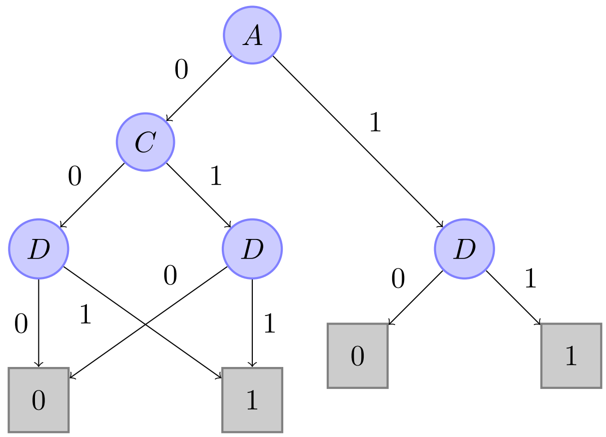

Abbildung 2: Shannongraph zu Aufgabe 8

(a) disjunktiver Normalform und

(b) konjunktiver Normalform an.

Aufgabe 8

Geben Sie zu dem in Abb. 2 dargestellten Shannongraphen den reduzierten Shannongraphen an.