Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Thorsten Bormer

Formale Systeme, WS 2010/2011

Übungsblatt 10

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 21.01.2011 besprochen.

Aufgabe 1

Gegeben sei die prädikatenlogische Signatur $\Sigma = (\{\}, \{E\}, \alpha)$ mit $\alpha(E) = 2$. Jedes Modell (V, I) zu dieser Signatur kann als gerichteter Graph $(V, I(E))$ aufgefasst werden. Das Universum V ist dabei die Menge der Knoten und das Prädikat $I(E)$ die Menge der Kanten.

(a) Geben Sie eine Formel $\phi(x, y)$ der Prädikatenlogik 2. Stufe (PL2) an, so dass $val_{V,I,\beta}(\phi(x, y)) = W$ gdw. es im Graphen $(V, I(E))$ einen Weg von $\beta(x)$ nach $\beta(y)$ gibt.

(b) Geben Sie eine Formel ψ der PL2 an, so dass $val_{V,I,\beta}(\psi) = W$ gdw. der Graph $(V, I(E))$ bipartit ist.

(c) Geben Sie eine Formel χ der PL2 an, so dass $val_{V,I,\beta}(\chi) = W$ gdw. der Graph $(V, I(E))$ drei-färbbar ist.

Aufgabe 2

Gegeben sei eine modallogische Signatur, die nur eine atomare Aussage beinhaltet: P. Außerdem sei ein Modell $\mathcal{K} = (W, R, I)$ über dieser Signatur wie folgt festgelegt:

$$W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$$
$$R = \{(w_1, w_2), (w_1, w_3), (w_1, w_4), (w_2, w_1), (w_2, w_4), (w_3, w_1), (w_3, w_2), (w_4, w_3)\}.$$

Die Interpretation I für dieses Modell sei wie folgt definiert:

$$I(P, w_1) = I(P, w_2) = I(P, w_4) = W,\ I(P, w_3) = I(P, w_5) = F$$

(a) Geben Sie für jede Welt $x \in W$ eine Formel ϕ_x an, so dass für jede Welt $y \in W, x \neq y$ gilt: $val_x(\phi_x) \neq val_y(\phi_x)$.

(b) Sei $[\![\phi]\!] = \{w \in W \mid val_w(\phi) = W\}$ für ein $\mathcal{K} = (W, R, I)$. Wir nennen $[\![\phi]\!]$ die *Extension* von ϕ (im Modell $\mathcal{K}$). Bestimmen Sie für die gegebene Interpretation I:

$[\![\Box P]\!]$ $[\![\Diamond P]\!]$

$[\![\Diamond\Box P]\!]$ $[\![\Box\Diamond P]\!]$

$[\![\Diamond\Diamond P]\!]$ $[\![\Box\Box P]\!]$

Aufgabe 3

Beweisen Sie: Die Formel $\Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$ charakterisiert die Klasse der schwach zusammenhängenden Kripke-Rahmen (S, R). Ein Kripke-Rahmen ist schwach zusammenhängend, falls folgendes gilt:

Für alle Zustände $x, y, z \in S$ gilt: falls $R(x, y)$ und $R(x, z)$, dann gibt es einen Zustand w, so dass $R(y, w)$ und $R(z, w)$.

Aufgabe 4

Überprüfen Sie, ob die folgenden Formeln in allen Kripke-Strukturen, bei denen der Kripke-Rahmen eine strikte Totalordnung[1], ist, allgemeingültig sind. Geben Sie für die nicht allgemeingültigen Formeln Gegenbeispiele an.

(a) $\Box A \to \Diamond A$

(b) $\Diamond\Box A \to \Box\Diamond\Box A$

(c) $\Diamond A \to \Diamond\Diamond A$

(d) $\Diamond A \wedge \Diamond B \to \Diamond((A \wedge \Diamond B) \vee (\Diamond A \wedge B) \vee (A \wedge B))$

Hinweis: Beispiel für eine strikte Totalordnung ist $(W, <)$ mit $W \subseteq \mathbb{Z}$.

[1] d.h., eine transitive Relation R, bei der zwischen je zwei Elementen a, b immer genau eine der Beziehungen $R(a, b)$, $a = b$ oder $R(b, a)$ besteht.