

Formale Systeme, WS 2010/2011

Übungsblatt 2

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 12.11.2010 besprochen.

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit dem Hilbertkalkül aus der Vorlesung die Aussage

$$\models \neg\neg A \rightarrow A .$$

Verwenden Sie dabei das in der Vorlesung vorgestellte Deduktionstheorem.

Hinweis: Leiten Sie zunächst aus der Aussage $\neg\neg A$ die Formel

$$\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$$

mit Hilfe des Hilbertkalküls her.

Aufgabe 2

Prüfen Sie die *Allgemeingültigkeit* des Modus Ponens, als aussagenlogische Formel $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ dargestellt, mit Hilfe des Markierungsalgorithmus für Hornformeln. Formen Sie dazu die Formel in KNF um.

Aufgabe 3

Gegeben seien folgende Formeln der AL:

- (a) $A \vee \neg A$
- (b) $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge \neg C$
- (c) $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge \neg C$

Entscheiden Sie, welche der angegebenen Formeln Hornformeln sind. Wie könnte man den Markierungsalgorithmus heranziehen, um die Erfüllbarkeit der nicht-Hornformeln zu entscheiden?

Aufgabe 4

Überprüfen Sie folgende Formeln auf Erfüllbarkeit. Benutzen Sie dazu den in der Vorlesung vorgestellten Markierungsalgorithmus.

- (a) $(P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_3) \wedge (P_1 \wedge P_3 \rightarrow P_4) \wedge P_1 \wedge (P_2 \rightarrow P_4) \wedge P_3$
- (b) $P_5 \wedge (P_2 \wedge P_4 \rightarrow \mathbf{0}) \wedge (P_5 \rightarrow P_1) \wedge (P_2 \wedge P_5 \rightarrow P_4) \wedge (P_1 \rightarrow P_2)$
- (c) $(P_3 \rightarrow \mathbf{0}) \wedge (P_1 \rightarrow P_4) \wedge (P_2 \wedge P_4 \rightarrow P_3) \wedge (P_4 \rightarrow P_5)$

Aufgabe 5

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Formel

$$A_n = P_1 \leftrightarrow P_2 \leftrightarrow P_3 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow P_{n-1} \leftrightarrow P_n$$

gegeben. Sei A_n^{knf} eine zu A_n erfüllbarkeitsäquivalente Formel in kurzer KNF (nach dem Verfahren aus der Vorlesung).

- (a) Wieviele Disjunktionen (in Abhängigkeit von n) enthält die KNF von A_n ?
- (b) Wieviele Disjunktionen enthält A_n^{knf} ?
- (c) Kann es eine auch eine kurze *disjunktive* Normalform geben, die effizient aus einer beliebigen aussagenlogischen Formel berechnet werden kann? Falls ja, geben Sie das entsprechende Verfahren an – andernfalls begründen Sie, warum kein solches Verfahren existieren kann.