Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Thorsten Bormer

Formale Systeme, WS 2010/2011

Übungsblatt 3

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 12.11.2010 besprochen.

Aufgabe 1

Angenommen, für Hilbertkalküle R_1 und R_2 gilt[1]

(a) für R_1: $(\phi \to \psi) \vdash_{R_1} \neg(\psi \to \neg\phi)$ (für alle Formeln ϕ und ψ)

(b) für R_2: $M \vdash_{R_2} (\phi \wedge \neg\phi)$

Kann R_1 korrekt sein? Kann R_1 vollständig sein? Wie verhält es sich bezüglich Korrektheit und Vollständigkeit mit R_2 in Abhängigkeit der Formelmenge M?

Aufgabe 2

Bei der Wahl eines guten Passworts sei folgendes zu beachten:

(1) Das Passwort muss sicher sein, und man muss es sich merken können. (2) Passwörter beinhalten Zahlen oder Sonderzeichen oder beides. (3) Ist das Passwort kurz und enthält keine Sonderzeichen, dann ist es nicht sicher. (4) Ein Passwort mit Sonderzeichen kann man sich nicht merken. (5) Ein Passwort mit Zahlen muss kurz sein, damit man es sich merken kann.

(a) Formalisieren Sie die Anforderungen an ein Passwort in Aussagenlogik. Verwenden Sie dazu die folgenden aussagenlogischen Variablen mit der angegebenen Bedeutung.

Das Passwort…

Si ist sicher

M kann man sich merken

Z enthält Zahlen

So enthält Sonderzeichen

K ist kurz

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionskalküls, dass ein solches Passwort nicht existieren kann.

[1] R_1 und R_2 sind hier Kalküle mit anderen Regeln und/oder Axiomen als der aus der Vorlesung.

Aufgabe 3

Zeigen Sie mithilfe des Resolutionskalküls

(a) die Unerfüllbarkeit der Klauselmenge

$$\{\{A, \neg B\}, \{\neg A, \neg B, \neg C\}, \{\neg A, C\}, \{A, B, C\}, \{B, \neg C\}\} \ ,$$

(b) die Allgemeingültigkeit der Formel

$$\neg A \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg D) \vee (D \wedge B) \vee (\neg B \wedge C) \ ,$$

(c) die Allgemeingültigkeit der Formel

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \ .$$

Aufgabe 4

Widerlegen Sie die Vollständigkeit einer Variante des Resolutionskalküls, bei der jede Klausel nur einmal zur Resolution verwendet werden darf.

Hinweis: Suchen Sie ein Gegenbeispiel (nicht ganz einfach!).

Aufgabe 5

Die lineare Resolution ist eine Variante der Resolution: Bei der Resolventenbildung muss eine der Elternklauseln entweder die Startklausel (eine zu Beginn frei gewählte Klausel) oder die Resolvente aus dem vorangegangenen Resolutionsschritt sein. Die jeweils andere Elternklausel kann frei gewählt werden.

Es gilt: Für jede unerfüllbare Klauselmenge gibt es eine Ableitung der leeren Klausel durch lineare Resolution, aber nicht jede angefangene Ableitung mit linearer Resolution kann zu einem Beweis geschlossen werden. Es kann also Sackgassen in der Beweissuche geben (lineare Resolution ist *nicht beweiskonfluent*). Insbesondere spielt die Wahl der Startklausel dabei eine Rolle; die Wahl einer ungünstigen Startklausel kann in die Sackgasse führen.

(a) Geben Sie für die Klauselmenge

$$\{\{A, D\}, \{\neg A, B\}, \{\neg D, B\}, \{C, A\}, \{C, B\}, \{\neg B\}\}$$

eine Ableitung der leeren Klausel $\Box$ mittels linearer Resolution an.

(b) Geben Sie für die Klauselmenge aus (a) einen angefangenen linearen Resolutionsbeweis an, der nicht zur leeren Klausel $\Box$ führen kann, also eine Sackgasse darstellt.