Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Thorsten Bormer

Formale Systeme, WS 2010/2011

Übungsblatt 5

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 26.11.2010 besprochen.

Aufgabe 1

Die (aussagenlogische) Klauselmenge S bestehe aus den folgenden Klauseln:

(1)	$\{ P, Q, T \}$	(5)	$\{ \neg R, \neg S, T \}$
(2)	$\{ \neg P \}$	(6)	$\{ \neg R, P, \neg T \}$
(3)	$\{ \neg Q, R \}$	(7)	$\{ R, \neg T \}$
(4)	$\{ \neg R, S \}$		

Zeigen Sie mit Hilfe des Davis-Putnam-Verfahrens, dass S unerfüllbar ist.

Aufgabe 2

Handelt es sich bei den folgenden Zeichenketten um Terme oder Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe? Welche Vorkommen welcher Variablen sind frei, welche gebunden?

(a) $j(f(x), g(x), h(z), k)$

(b) $\forall y \exists p\, p(y)$

(c) $\forall x \forall z\, (g(f(z), f(y)) \to z)$

(d) $\forall x \exists y\, (p(f(x)) \to q(y, z))$

Die Signatur enthalte dabei folgende Symbole: $F_\Sigma = \{f, g, h, i, j, k\}$, $P_\Sigma = \{p, q, r\}$. Die Stelligkeiten der Symbole können Sie als korrekt verwendet annehmen. Außerdem sei $Var = \{x, y, z\}$.

Aufgabe 3

(a) Betrachten Sie jeweils die folgenden Substitutionen σ und Formeln F. Falls σ für F kollisionsfrei ist, geben Sie $\sigma(F)$ an; andernfalls geben Sie an, wo eine Kollision auftritt.

(i)	$\sigma = \{x/c,\ y/f(c, g(x))\}$	$F = \forall x(p(g(x), f(x, y)) \vee q(x))$
(ii)	$\sigma = \{x/f(g(x), c)\}$	$F = \exists y(p(x, y) \vee \exists z \forall x(f(z, c) \doteq f(c, x)))$
(iii)	$\sigma = \{y/g(x),\ z/g(y)\}$	$F = p(x, y) \to \forall x(q(f(x, z)) \vee \exists y(q(f(x, y))))$

(b) Betrachten Sie jeweils die folgenden Formeln F und G. Geben Sie einen allgemeinsten Unifikator μ sowie das Ergebnis $\mu(F) = \mu(G)$ der Unifikation an, falls sie unifizierbar sind.

(Hierbei sind a, b Konstanten, f, g, h Funktionssymbole und v, x, y, z Variablen.)

(i)	$F = f(x, z, z)$	$G = f(g(a, y), h(v), h(y))$
(ii)	$F = f(g(x, z), z, h(b, x))$	$G = f(g(a, y), h(v, a), y)$
(iii)	$F = g(x, y)$	$G = g(f(y), f(x))$
(iv)	$F = f(g(y), h(y, g(y)))$	$G = f(z, h(g(x), g(g(x))))$

Aufgabe 4

Beweisen Sie (informell), dass das Davis-Putnam-Verfahren korrekt ist. In Ihrer Begründung können Sie auf die Korrektheitseigenschaften der bereits in der Vorlesung vorgestellten Kalküle zurückgreifen.

Aufgabe 5

Geben Sie eine Folge

$$(s_1, t_1),\ (s_2, t_2),\ (s_3, t_3),\ \ldots$$

von Termpaaren an, so daß:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind s_n und t_n unifizierbar.
- Die Größe der Terme s_n und t_n wächst (höchstens) linear in n.
- Die Größe des Ergebnisses $\sigma_n(s_n)$ bzw. $\sigma_n(t_n)$ der Unifikation (σ_n ist ein allgemeinster Unifikator von s_n und t_n) wächst exponentiell in n.

Hinweis: Betrachten Sie die Terme $g(x_1, x_2)$ und $g(c, f(x_1, x_1))$, und verallgemeinern Sie.