Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Thorsten Bormer

Formale Systeme, WS 2010/2011

Übungsblatt 6

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 10.12.2010 besprochen.

Aufgabe 1

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

(a) Wenn jeder arme Mensch einen reichen Vater hat, dann gibt es einen reichen Menschen, der einen reichen Großvater hat.

(b) In einer Bar gibt es stets eine Person P, so daß, falls P etwas trinkt, alle anwesenden Personen etwas trinken.

(c) Jeder Barbier rasiert alle Personen, außer denen, die sich selbst rasieren.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Struktur $I = \langle U, A \rangle$ folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
&U = \mathbb{R},\\
&p^I = \{z \mid z \geq 0\},\\
&q^I = \{(x, y) \mid x = y\},\\
&f^I(z) = z^2,\\
&g^I(x, y) = x + y,\\
&x^I = \sqrt{2},\\
&y^I = -1
\end{aligned}
$$

Bestimmen Sie den Wert folgender Terme und Formeln:

1. $I(g(f(x), f(y)))$
2. $I(\forall x\ p(f(x)))$
3. $I(\exists z\ \forall x\ \forall y\ q(g(x, y), z))$
4. $I(\forall y\ (q(f(x), y) \rightarrow p(g(x, y))))$

Aufgabe 3

Seien p und q Prädikate über den natürlichen Zahlen. Die Semantik von p und q sei gegeben durch:

- $p(x, y)$ gilt genau dann, wenn x die Zahl y teilt und
- $q(x, y)$ gilt genau dann, wenn $x \leq y$ ist.

Für alle Interpretationen I, deren Universum die natürlichen Zahlen sind und für die gilt, dass

$$p^I = \{(x, y) \mid x \text{ teilt } y\} \text{ und}$$
$$q^I = \{(x, y) \mid x \leq y\}$$

ist, muss z.B. für die im Aufgabenteil (a) gebildete Formel F gelten, dass F^I genau dann wahr ist, wenn y^I eine Primzahl ist.

Formalisieren Sie mit Hilfe der Prädikatenlogik:

(a) y ist eine Primzahl.

(b) y ist eine gerade Zahl.

(c) ggt ist der größte gemeinsame Teiler der beiden Zahlen x und y.

(d) kgV ist das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Zahlen x und y.

(e) x und y sind teilerfremde Zahlen.

(f) zwischen zwei verschiedenen natürlichen Zahlen liegt stets eine natürliche Zahl

Aufgabe 4

Zeigen sie mit Hilfe des Hoare-Kalküls, dass folgendes Hoare-Tripel gültig ist:[1]

$$\{i \doteq a \wedge j \doteq b\} \text{ k := i; i := j; j := k } \{i \doteq b \wedge j \doteq a\}$$

Verwenden Sie dabei die aus der Vorlesung bekannte Zuweisungsregel:

$$\frac{}{\{\{x/s\}A\} \text{ x := s } \{A\}}$$

sowie die folgende Kompositionsregel:

$$\frac{\{A\} \text{ P } \{B\}, \quad \{B\} \text{ Q } \{C\}}{\{A\} \text{ P; Q } \{C\}}$$

Aufgabe 5

Sei Σ eine prädikatenlogische Signatur mit einem zweistelligen Prädikatensymbol p.

(a) Geben Sie eine prädikatenlogische Formel F über Σ an, so daß gilt: Eine Interpretation (D, I) ist genau dann Modell von F, wenn die Relation $I(p)$ eine *strikte Halbordnung* (also transitiv und irreflexiv) auf D ist.

(b) Geben Sie eine erfüllbare prädikatenlogische Formel G über Σ an, so daß gilt: Wenn eine Interpretation (D, I) Modell von G ist, dann ist D unendlich.

[1] In einer früheren Version des Aufgabenblatts lautete das Hoare-Tripel fälschlich:

$$\{i \doteq a \wedge k \doteq b\} \text{ k := i; i := j; j := k } \{i \doteq b \wedge k \doteq a\}$$