

Formale Systeme, WS 2010/2011

Übungsblatt 7

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 23.12.2010 besprochen.

Aufgabe 1

Zu einer prädikatenlogischen Formel G in Pränexnormalform bezeichne G_{sko} die durch Skolemisierung (genauer: durch wiederholte Anwendung von Lemma 4.61 im Skriptum) aus G konstruierte Formel in Skolem-Normalform.

- (a) Geben Sie (ohne Beweis) jeweils eine prädikatenlogische Formel G in Pränexnormalform an, so dass Folgendes gilt:
 - (i) $\neg G_{\text{sko}} \wedge G$ ist erfüllbar,
 - (ii) $\neg G_{\text{sko}} \wedge G$ ist unerfüllbar,
 - (iii) $G \rightarrow G_{\text{sko}}$ ist nicht allgemeingültig.
- (b) Zeigen Sie, dass $G_{\text{sko}} \rightarrow G$ für alle prädikatenlogischen Formeln G in Pränexnormalform allgemeingültig ist.

Aufgabe 2

Berechnen Sie für die prädikatenlogischen Formeln (a) und (b) zunächst die Pränex-Normalform und dann die Skolem-Normalform.

- (a) $(\forall x p(x) \rightarrow \forall x q(x)) \rightarrow \forall x(p(x) \rightarrow q(x))$
- (b) $\exists x(\forall y p(x, y) \vee \exists z(p(x, z) \wedge \forall x p(z, x)))$
- (c) Geben Sie eine Skolem-Normalform für (a) an, die sich von Ihrer Lösung zu (a) nicht nur durch Umbenennung und Äquivalenzumformung unterscheidet.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Signatur $\Sigma = (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma)$ mit

- $F_\Sigma = \{b, f\}$,
- $P_\Sigma = \{p\}$ und
- $\alpha_\Sigma(b) = 0, \alpha_\Sigma(f) = 1, \alpha_\Sigma(p) = 1$.

- (a) Wieviele verschiedene Herbrand-Interpretationen über Σ gibt es?
(b) Wieviele verschiedene Herbrand-Modelle besitzt die Formel

$$p(f(f(b))) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(f(x))) \quad ? \quad (1)$$

Zählen Sie sie auf.

- (c) Jedes Herbrand-Modell über Σ der Formel (1) ist auch Modell der Formel

$$\forall x(p(f(f(x)))) \quad . \quad (2)$$

Geben Sie eine (Nicht-Herbrand-)Interpretation an, die Modell von (1) aber nicht von (2) ist.

Aufgabe 4

Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass es keine prädikatenlogische Formel geben kann, die genau die zusammenhängenden, gerichteten Graphen charakterisiert. Ein Graph ist zusammenhängend, wenn es für je zwei verschiedene Knoten des Graphen einen Pfad zwischen diesen Knoten gibt.

Sei dazu eine prädikatenlogische Signatur $\Sigma = (\emptyset, \{kante\}, kante \mapsto 2)$ gegeben. Weiterhin sei die Domäne D festgelegt als die Menge der Knoten. Die Interpretation des Prädikatsymbols $kante(u, v)$ ist wahr gdw. im Graph eine gerichtete Kante zwischen u und v verläuft.

Zeigen Sie, dass es keine Formel F gibt, so daß für jede Interpretation (D, I) über Σ gilt:

(D, I) ist Modell von $F \Leftrightarrow$ der durch (D, I) beschriebene Graph: $(D, I(kante))$ ist zusammenhängend.