Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Thorsten Bormer

Formale Systeme, WS 2010/2011

Übungsblatt 9

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 21.01.2010 besprochen.

Aufgabe 1

Die Korrektheit und Vollständigkeit von Sequenzenkalkül-Regeln lässt sich wie folgt definieren:

> **Definition.** Seien $A_1, \ldots, A_n, B$ Sequenzen. Eine Regel
>
> $$\frac{A_1 \ \cdots \ A_n}{B}$$
>
> im Sequenzenkalkül heißt
>
> *korrekt*, wenn jedes Modell aller A_i $(1 \leq i \leq n)$ auch Modell von B ist,
>
> *vollständig*, wenn jedes Modell von B auch Modell aller A_i $(1 \leq i \leq n)$ ist.

Zeigen Sie, dass folgende Regelschemata korrekt und vollständig sind.

(a)

$$\frac{\Gamma, \psi \ \Rightarrow \ \varphi[\psi \leftarrow \mathbf{1}], \ \Delta}{\Gamma, \psi \ \Rightarrow \ \varphi, \ \Delta} \ (\mathsf{replaceKnownLeft})$$

Dabei bezeichnet $\varphi[\psi \leftarrow \mathbf{1}]$ die Formel, die entsteht, wenn man ein Vorkommen von ψ als Teilformel in ϕ durch $\mathbf{1}$ ersetzt.

(b)

$$\frac{\Gamma, \varphi \ \Rightarrow \ \Delta \qquad \Gamma \ \Rightarrow \ \varphi, \Delta}{\Gamma \ \Rightarrow \ \Delta} \ (\mathsf{Cut})$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die prädikatenlogische Signatur

$$\Sigma_N = (\{O, s, +\}, \{\}, \alpha) \text{ mit } \alpha(O) = 0, \alpha(s) = 1, \alpha(+) = 2.$$

Bisher wurden die vorgestellten Kalküle benutzt, um die Gültigkeit von Aussagen in *allen* prädikatenlogischen Interpretationen zu beweisen. Man kann aber auch die Gültigkeit von Aussagen in einer *fest gewählten* Interpretation als Beweisziel formulieren.

Dabei bleiben sämtliche Regeln eines Kalküls korrekt (sie gelten ja für alle Interpretationen und damit insbesondere auch für die fest gewählte). Unter Umständen kann man aber keinen vollständigen Kalkül für eine bestimmte, fest gewählte Interpretation angeben (in der neben den allgemeingültigen Formeln noch weitere Formeln wahr sind).

Betrachten wir im Folgenden die fest gewählte Interpretation $(\mathbb{N}, I_\mathbb{N})$ der natürlichen Zahlen über Σ_N, also

$$I_\mathbb{N}(O) = 0, I_\mathbb{N}(s)(n) = n + 1, I_\mathbb{N}(+)(a, b) = a + b$$

Als ein Regelschema, das zwar nicht im allgemeinen sehr wohl aber für diese spezielle Interpretation korrekt, fügen wir die *vollständige Induktion* zum Sequenzenkalkül hinzu. Sie ist bekanntermaßen eine korrekte Schlussweise für die natürlichen Zahlen.

$$\begin{array}{lcll} \Gamma & \Rightarrow & \{n/O\}\varphi,\ \Delta & \text{(Induktionsanfang)} \\ \Gamma & \Rightarrow & \forall n(\varphi \to \{n/s(n)\}\varphi),\ \Delta & \text{(Induktionsschritt)} \\ \hline \Gamma & \Rightarrow & \forall n\ \varphi,\ \Delta & \end{array}$$

(wobei die Substitution $\{n/s(n)\}$ kollisionsfrei für φ sein muss).

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des um diese Regel erweiterten Sequenzenkalküls, dass folgende Aussage in den natürlichen Zahlen gilt:

$$\forall x \forall y (x + s(y) \doteq s(x + y) \land s(x) + y \doteq s(x + y)) \to \forall x \forall y\ x + y \doteq y + x$$

Hinweis: Auf der Webseite zur Vorlesung liegt eine Formalisierung dieses Problems in KeY vor, so dass Sie den Beweis im KeY-System führen können. Dies kann als Vorübung zur 2. Praxisaufgabe dienen, in das KeY-System zum Einsatz kommen wird. Informationen zur Installation und Benutzung von KeY finden sich auf der Webseite. Der Beweis für diese Beispielformel lässt sich mit KeY recht einfach führen, wenn man zunächst zwei Schritte von Hand macht und dann die Induktionsregel „INDUCTION“ auf den Sukzedenten anwendet. Für den Induktionsanfang sollte dann INDUCTION noch einmal auf den Sukzedenten benutzt werden. Nützlich ist, zu wissen, dass man in KeY eine universell quantifizierte Formel instantiieren kann, indem man den einzusetzenden Term per Drag-and-drop auf die universelle Formel zieht, und dass man eine Gleichung anwenden kann, indem man sie auf den Term zieht, auf den sie angewendet werden soll.

(b) Geben Sie eine (andere) Interpretation von Σ_N an, in der diese Aussage nicht gilt.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Relation $\succ = \{(a,b),(b,d),(c,b),(d,a),(d,e)\}$.

(a) Bestimmen Sie $\rightarrow$, $\xrightarrow{+}$, und $\leftrightarrow$.

(b) Zeigen Sie, daß $\succ$ lokal konfluent sowie konfluent ist.

(c) Erweitern Sie die Relation $\succ$ um ein Tupel, so daß sie zwar lokal konfluent bleibt, aber nicht mehr konfluent ist.

Aufgabe 4

Seien $N := \mathbb{N} \setminus \{1, 0\}$ und $N' := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ Teilmengen der natürlichen Zahlen. Die Relation $\succ \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist definiert als

$$a \succ b \quad :\Longleftrightarrow \quad b \text{ teilt } a \text{ und } a \neq b \qquad (a, b \in \mathbb{N}).$$

Betrachten Sie nun die Reduktionssysteme $(N, \succ)$ und $(N', \succ)$:

(a)	Ist $(N, \succ)$ lokal konfluent?	Ist $(N', \succ)$ lokal konfluent?
(b)	Ist $(N, \succ)$ konfluent?	Ist $(N', \succ)$ konfluent?
(c)	Ist $(N, \succ)$ noethersch?	Ist $(N', \succ)$ noethersch?
(d)	Besitzt $(N, \succ)$ irreduzible Elemente? Wenn ja, welche?	Besitzt $(N, \succ)$ irreduzible Elemente? Wenn ja, welche?

Begründen Sie Ihre Antworten kurz.
Bemerkung: Mit $\succ$ ist jeweils die Einschränkung auf $N \times N$ bzw. $N' \times N'$ gemeint.