Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Thorsten Bormer

Formale Systeme, WS 2010/2011

Lösungen zum Übungsblatt 1

Dieses Blatt wurde in der Übung am 29.10.2010 besprochen.

Zu Aufgabe 1

Für jedes Land i gibt es drei AL-Variablen R_i, G_i, B_i. Nun muss für einen gegebenen Graphen formalisiert werden, dass

1. Jedes Land mindestens 1 Farbe hat,
2. jedes Land höchstens 1 Farbe hat und
3. benachbarte Länder nicht dieselbe Farbe haben.

$$\begin{aligned} F = \quad & \{R_i \vee G_i \vee B_i : 0 \leq i < L\} \\ \cup \quad & \{(\neg R_i \vee \neg G_i) \wedge (\neg G_i \vee \neg B_i) \wedge (\neg B_i \vee \neg R_i) : 0 \leq i < L\} \\ \cup \quad & \{(\neg R_i \vee \neg R_j) \wedge (\neg G_i \vee \neg G_j) \wedge (\neg B_i \vee \neg B_j) : 0 \leq i, j < L, Na(i,j)\} \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 2

Wir führen für jede Zellenposition (i, j) des Sudoku und jede Zahl k zwischen 1 und 9 eine Boolesche Variable

$$D^k_{i,j}$$

ein, mit der Vorstellung, dass $D^k_{i,j}$ den Wert *wahr* hat, wenn auf dem Feld (i, j) die Zahl k steht.

Wir benutzen kartesische Koordinaten zur Notation von Positionen.

Formalisierung Die folgenden vier Bedingungen haben zur Folge, dass das Sudoku vollständig (u.U. auch mehrfach) gefüllt ist und jede Zeile, Spalte und Region die Zahlen von 0 bis 9 aufweist:

Jede Zahl kommt mindestens einmal pro Zeile vor.

$$D^v_{1,y} \vee D^v_{2,y} \vee D^v_{3,y} \vee D^v_{4,y} \vee D^v_{5,y} \vee D^v_{6,y} \vee D^v_{7,y} \vee D^v_{8,y} \vee D^v_{9,y}$$

jeweils für alle $1 \leq y \leq 9$ und $0 \leq v \leq 9$.

Jede Zahl kommt mindestens einmal pro Spalte vor.

$$D^v_{x,1} \vee D^v_{x,2} \vee D^v_{x,3} \vee D^v_{x,4} \vee D^v_{x,5} \vee D^v_{x,6} \vee D^v_{x,7} \vee D^v_{x,8} \vee D^v_{x,9}$$

jeweils für alle $1 \leq x \leq 9$ und $0 \leq v \leq 9$.

Jede Zahl kommt mindestens einmal pro Region vor. Die Formel

$$D^v_{1,1} \vee D^v_{1,2} \vee D^v_{1,3} \vee D^v_{2,1} \vee D^v_{2,2} \vee D^v_{2,3} \vee D^v_{3,1} \vee D^v_{3,2} \vee D^v_{3,3}$$

für alle $0 \leq v \leq 9$ kodiert, dass die Ziffer v mindestens einmal in der Region links unten vorkommen muss. Analog für alle anderen Regionen.

Auf jeder Zelle steht mindestens eine Zahl.

$$D^0_{x,y} \vee D^1_{x,y} \vee D^2_{x,y} \vee D^3_{x,y} \vee D^4_{x,y} \vee D^5_{x,y} \vee D^6_{x,y} \vee D^7_{x,y} \vee D^8_{x,y} \vee D^9_{x,y}$$

jeweils für alle $1 \leq x \leq 9$ und $1 \leq y \leq 9$.

Die folgende Bedingung legt (zusammen mit den vorigen) die Anzahl der Eintragungen für das Sudoku auf genau 90 fest (neun Zeilen, wobei jede Zeile die Zahlen von 0 bis 9 genau einmal enthält). Außerdem wird sichergestellt, dass jede Zeile genau ein doppelt belegtes Feld enthält – im gesamten Sudoku sind also 9 doppelt belegte Felder zu verteilen.

Jede Zahl kommt *höchstens* einmal in jeder Zeile vor.

$$\neg(D^v_{x_1,y} \wedge D^v_{x_2,y})$$

für alle $0 \leq v \leq 9$ und $1 \leq x_1, x_2, y \leq 9$ mit $x_1 < x_2$.

Aus den Bedingungen "jede Zahl kommt mindestens einmal pro Spalte bzw. Region vor" folgt, dass jede Spalte und Region mindestens ein doppelt gefülltes Feld enthalten muss. Das Sudoku enthält jeweils 9 Spalten und Regionen und es gibt 9 doppelt belegte Felder, die zu verteilen sind. Daraus folgt, dass jede Spalte und Region genau ein doppelt belegtes Feld aufweist.

Jede Zeile, Spalte und Region hat daher genau 10 Eintragungen. Daraus folgt zusammen mit der Bedingung, dass jede Zahl mindestens einmal pro Zeile/Spalte/Region vorkommen muss, dass keine zwei Eintragungen mit der gleichen Zahl existieren.

Zu Aufgabe 3

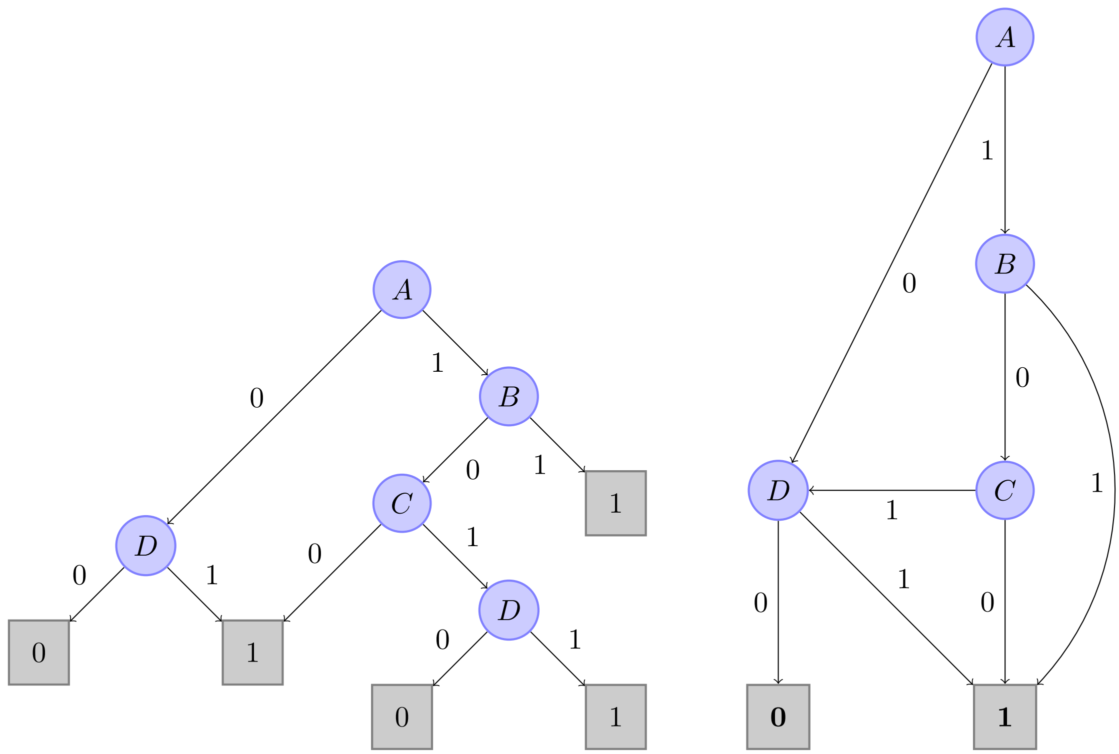
Diese Aufgaben lassen sich leicht durch (a) Angabe einer Wertetabelle oder (b) Transformation in Normalform mit Hilfe von Äquivalenzumformungen lösen. Man gewinnt aber mehr an Intuition, wenn man analytischer vorgeht.

(a) $A \to ((A \to B) \to B)$
Sei I eine beliebige Interpretation.

Fall 1: Wird die *Prämisse* A (der linke Teil der Implikation) unter I zu falsch ausgewertet, gilt also $\text{val}_I(A) = F$, so ist die ganze Aussage wahr.

Fall 2: Nehmen wir an, es gelte $\text{val}_I(A) = W$. Dann müssen wir zeigen, dass auch die *Konklusion* $K = (A \to B) \to B$ (der rechte Teil der Implikation) unter I zu wahr auswertet. Fall 2 a: Ist in der inneren Implikation $A \to B$ falsch, ist die Konklusion wahr und die Aussage bewiesen. Fall 2 b: Sei also nun $\text{val}_I(A \to B) = W$. Dann ist wegen $\text{val}_I(A) = W$ und des *Modus Ponens* auch $\text{val}_I(B) = W$, und also $\text{val}_I(K) = W$. □

(b) $(A \to (A \to B)) \to B$
Wir zeigen, dass dies keine Tautologie ist. Dazu suchen wir eine Interpretation, die die Formel falsch macht: Diese muss B falsch machen und $A \to (A \to B)$ wahr. Offensichtlich ist dies erfüllt durch eine Interpretation mit $I(A) = F$ und $I(B) = F$. □



(a) Graph erstellt aus Fallunterscheidung

(b) Reduzierter Shannongraph

Abbildung 1: Shannon-Graph zu Aufgabe 5

Zu Aufgabe 4

Exemplarisch für A'; A'' analog.

$$
\begin{aligned}
A &= (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \\
&\stackrel{1}{\equiv} (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \\
&\stackrel{2}{\equiv} (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge R)
\end{aligned}
$$

Es wird die *Kommutativität* und *Assoziativität* gebraucht, um die Teilformeln umzustellen oder umzugruppieren.

Zu 1: Die erste Teilformel kann wegen der *Idempotenz* von $\vee$ dupliziert werden und wird am Ende hinzugefügt.

Zu 2: Jeweils zwei Teilformeln lassen sich dann wegen *Distributivität* (a), *Tertium-non-datur* (b) und der Eigenschaft von **1** als *neutralem Element* bezgl. $\wedge$ (c) reduzieren, beispielsweise:

$$
\begin{aligned}
& (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \\
\stackrel{(a)}{\equiv}\ & (P \wedge \neg Q) \wedge (R \vee \neg R) \\
\stackrel{(b)}{\equiv}\ & (P \wedge \neg Q) \wedge \mathbf{1} \\
\stackrel{(c)}{\equiv}\ & P \wedge \neg Q
\end{aligned}
$$

Man soll sehen, dass die beiden Formeln A' und A'' beide (minimale) DNF für A sind und diese daher (obwohl Normalform) überhaupt nicht eindeutig ist.

Zu Aufgabe 5

1. durch Fallunterscheidung kommt man leicht auf den Graphen aus Abb. 1(a). Durch Reduktion dieses Graphen erhält man den gesuchten Graphen aus Abb. 1(b).

2. $sh(A, sh(D, 0, 1), sh(B, sh(C, 1, sh(D, 0, 1)), 1))$

Zu Aufgabe 6

$$sh(P_1, sh(P_2, 0, sh(P_3, 1, 0)), sh(P_2, sh(P_3, 0, 1), 1))$$

Das zeigt, dass die Reihenfolge der Variablen durchaus von Bedeutung ist bei BDDs!

Zu Aufgabe 7

Zu (a): Die natürlichste DNF ist die Disjunktion aller Pfade zur **1**. Die genommenen Kanten eines Pfades werden dabei konjunktiv verknüpft: Bei Kanten-Markierung **1** mit dem Literal des verlassenen Knotens, bei Kanten-Markierung **0** mit der Negation des entsprechenden Literals.

$$(P_1 \wedge P_3) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3)$$

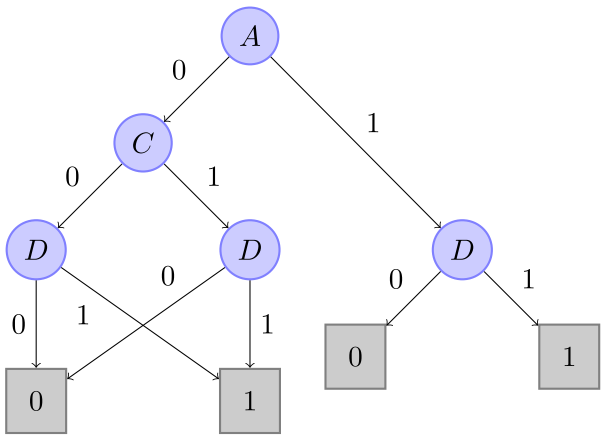
Zu (b): Wie so oft ist das das Duale: Die Konjunktion aller Pfade zur 0. Die genommenen Kanten eines Pfades werden dabei disjunktiv verknüpft: Bei Kanten-Markierung $\boxed{\mathbf{0}(!)}$ mit dem Literal des verlassenen Knotens, bei Kanten-Markierung $\boxed{\mathbf{1}(!)}$ mit der Negation des entsprechenden Literals.

$$(\neg P_1 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3) \wedge (P_1 \vee \neg P_2)$$

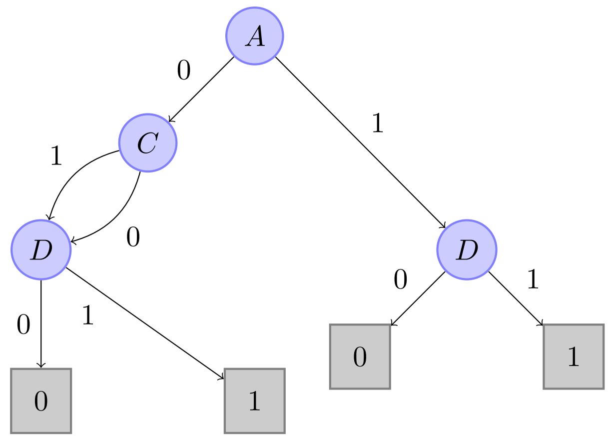
Idee: Während man bei (a) alle möglichen Wege zur 1 aufzählt, stellt man in (b) Bedingungen auf, damit die 0 vermieden wird.

Zu Aufgabe 8

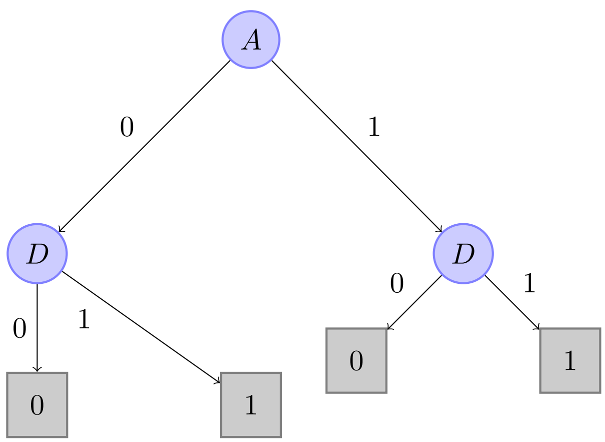
Die notwendigen Reduktionsschritte können Abbildung 2 entnommen werden.



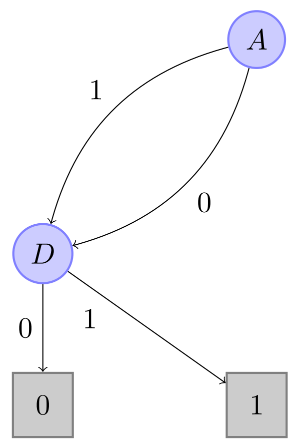
(a) Ausgangsgraph



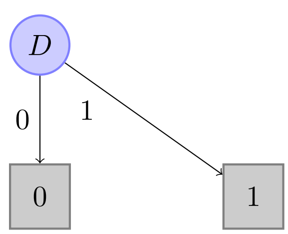
(b) Reduktion isomorpher Teilgraphen



(c) Elimination doppelter Kanten



(d) Reduktion isomorpher Teilgraphen



(e) Elimination doppelter Kanten

Abbildung 2: Reduktion des Shannongraphen aus Aufgabe 8