Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Thorsten Bormer

Formale Systeme, WS 2010/2011

Lösungen zu Übungsblatt 10

Dieses Blatt wurde in der Übung am 21.01.2011 besprochen.

Zu Aufgabe 1

(a) Die Menge aller von $\beta(x)$ erreichbaren Knoten ist die *kleinste* Menge, die

- $\beta(x)$ enthält und
- unter Anwendung von E abgeschlossen ist.

Diese kleinste Menge ist eindeutig bestimmt und Teilmenge jeder Menge mit diesen beiden Eigenschaften.

Fordern wir nun, daß die von $\beta(x)$ erreichbaren Knoten zu *jeder* Menge mit den beiden genannten Eigenschaften zählen, so fordern wir dadurch insbesondere, daß sie in der kleinsten solchen Menge liegen:

$$\phi(x, y) \quad = \quad \forall Q\,((Q(x) \land \forall w \forall z\,(Q(w) \land E(w, z) \to Q(z))) \to Q(y)) \ .$$

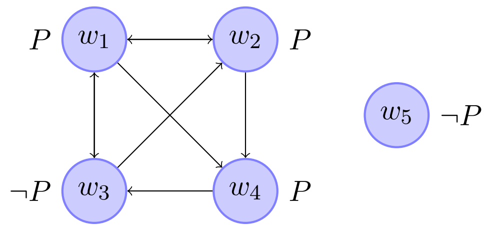
Die Minimalitätsbedingung ist übrigens der Teil der Erreichbarkeit, der sich nicht in der Prädikatenlogik erster Stufe ausdrücken läßt.

(b) Der durch $(V, I(E))$ beschriebene Graph ist bipartit, falls sich die Menge V in zwei disjunkte Teilmengen M_1 und M_2 aufteilen lässt, so dass zwischen den Knoten in M_1 bzw. M_2 keine Kanten verlaufen:

$$\psi \quad = \quad \exists M_1 \exists M_2 \forall x (M_1(x) \leftrightarrow \neg M_2(x)) \land \forall x \forall y ((M_1(x) \leftrightarrow M_1(y)) \to \neg E(x, y))$$

(c) Analog zu (b), da jeder k-partite Graph k-färbbar ist.

Zu Aufgabe 2



(a) Wir haben die Interpretation I in die Kripkestruktur oben eingezeichnet. Die Welten w_1, w_2 und w_4 interpretieren P als wahr, die Welten w_3 und w_5 als falsch.

Die Unterscheidungsformeln sind (eine Möglichkeit):

$$\phi_1 = \Diamond P \wedge \Diamond\Box P \wedge P \qquad \phi_2 = \Box P \wedge \Diamond P \wedge P \qquad \phi_3 = \neg P \wedge \Diamond P$$
$$\phi_4 = \Box\Diamond P \wedge P \qquad \phi_5 = \Box\mathbf{0}$$

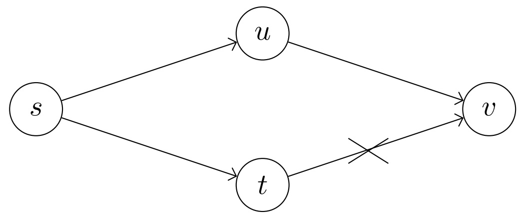
(b) Die Extensionen in diesem Modell sind:

$$[\![\Box P]\!] = \{w_2, w_3, w_5\} \qquad [\![\Diamond P]\!] = \{w_1, w_2, w_3\}$$
$$[\![\Diamond\Box P]\!] = \{w_1, w_3, w_4\} \qquad [\![\Box\Diamond P]\!] = \{w_3, w_4, w_5\}$$
$$[\![\Diamond\Diamond P]\!] = \{w_1, w_2, w_3, w_4\} \qquad [\![\Box\Box P]\!] = \{w_4, w_5\}$$

Zu Aufgabe 3

- Gegeben sei ein nicht schwach zusammenhängender Kripke-Rahmen (S, R). Zu zeigen ist, dass $(S, R) \not\models \Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$, dazu müssen wir zeigen, dass es ein I gibt mit $(S, R, I) \not\models \Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$

  Da (S, R) nicht schwach zusammenhängend ist, muss in R folgende Situation existieren:

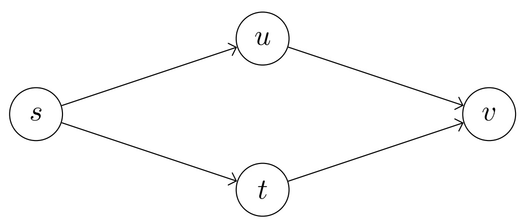
  

  Wir betrachten eine Struktur (S, R, I) mit $I(t, A) = W$ und $I(x, A) = F$ für alle $x \neq t$. Damit gilt:

  $$\begin{array}{rcll} s & \models & \Diamond\Box A & \\ t & \not\models & \Diamond A & \\ \text{und damit } s & \not\models & \Box\Diamond A & \quad \text{Widerspruch zur Annahme!} \end{array}$$

  Die gleiche Argumentation gilt, falls die Welten u und t in obiger Struktur identisch sind.

- Sei nun (S, R) schwach zusammenhängend. Zu zeigen ist, dass $\Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$ in allen Kripkestrukturen (S, R, I) gilt.

  In einem beliebigen Zustand $s \in S$ gelte $s \models \Diamond\Box A$, d.h., es existiert ein $u \in S$ mit $R(s, u)$ und $u \models \Box A$. Es ist nun zu zeigen, dass $s \models \Box\Diamond A$. Sei $t \in S$ ein beliebiger Zustand mit $R(s, t)$. Weil (S, R) schwach funktional ist, gibt es einen Zustand $v \in S$ mit $R(u, v)$ und $R(t, v)$. Aus $u \models \Box A$ folgt: $v \models A$ und damit gilt $t \models \Diamond A$. Jeder weitere Zustand $w \in S$ hat nach Annahme ebenfalls einen gemeinsamen Nachfolger mit Zustand u, woraus sich $s \models \Box\Diamond A$ folgern lässt.

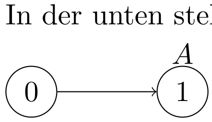
Zu Aufgabe 4

(a) ist nicht allgemeingültig.

Gegenbeispiel: Sei $S = \{0\}$ und $R = \emptyset$, dann ist $0 \models \Box A$, aber nicht $0 \models \Diamond A$.

(b) ist nicht allgemeingültig.

In der unten stehenden Struktur gilt $0 \models \Diamond\Box A$, aber nicht $0 \models \Box\Diamond\Box A$.



(c) ist nicht allgemeingültig.

In der unten stehenden Struktur gilt $0 \models \Diamond A$, aber nicht $0 \models \Diamond\Diamond A$.

(d) ist allgemeingültig.

Sei $t_0 \in S$ eine Kripkewelt. Gelte

$$\mathcal{K}, t_0 \models \Diamond A \wedge \Diamond B,$$

dann gibt es zwei Welten $t_A > t_0$ und $t_B > t_0$, so dass

$$\mathcal{K}, t_A \models A \text{ und } K, t_B \models B.$$

Nun werden wir in einer (erschöpfenden) Fallunterscheidung drei Fälle nebeneinander stellen:

$t_A < t_B$: Dann gilt $\mathcal{K}, t_A \models A \wedge \Diamond B$, also in t_o auch $\mathcal{K}, t_0 \models \Diamond(A \wedge \Diamond B)$.

$t_A = t_B$: Dann gilt $\mathcal{K}, t_A \models A \wedge B$, also in t_o auch $\mathcal{K}, t_0 \models \Diamond(A \wedge B)$.

$t_A > t_B$: Dann gilt $\mathcal{K}, t_B \models \Diamond A \wedge B$, also in t_o auch $\mathcal{K}, t_0 \models \Diamond(\Diamond A \wedge B)$.

Da immer eine der drei Möglichkeiten erfüllt sein muss, ist insgesamt

$$\begin{array}{rrcl} & \mathcal{K}, t_0 & \models & \Diamond(A \wedge \Diamond B) \vee \Diamond(\Diamond A \wedge B) \vee \Diamond(A \wedge B) \\ \Longleftrightarrow & \mathcal{K}, t_0 & \models & \Diamond((A \wedge \Diamond B) \vee (\Diamond A \wedge B) \vee (A \wedge B)) \end{array}$$

Dass diese Aussage gilt, ist deshalb der Fall, weil die Welten alle „in einer Kette“ liegen. Es gibt keine Verzweigungsmöglichkeiten, so dass auf einem Pfad A und einem anderen B gelten könnte. Die beiden Welten t_A und t_B müssen bezgl. R in Beziehung zu einander stehen.