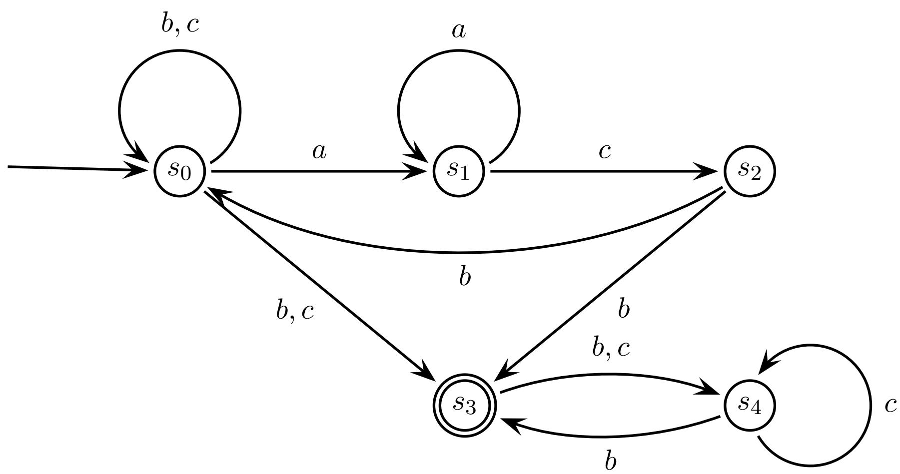
Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Thorsten Bormer

Formale Systeme, WS 2010/2011

Lösungen zu Übungsblatt 12

Dieses Blatt wurde in der Übung am 11.02.2011 besprochen.

Zu Aufgabe 1



Zu Aufgabe 2

(a) $L^\omega = a(aa + b + c)^\omega$

(b) $L^\omega = a((aa)^* bb)^\omega$

(c) $L^\omega = a(bba + c)^\omega$

Zu Aufgabe 3

Im Folgenden wird der Operator **V** verwendet, wie er in der Vorlesung der Vorlesung definiert wurde. Dieser Operator wird bisweilen auch **Release-Operator** genannt, weil die Semantik von $A\,\mathbf{V}\,B$ gerade ist, dass B gelten muss, bis A gilt, also A B löst ("A releases B").

Dies taugt als Merkhilfe.

(a) Diese Aussage gilt nicht in allen ω-Strukturen.

Gegenbeispiel:

$$\xi(0) = \{A\}, \quad \xi(1) = \{B\}, \quad \xi(2) = \{C\}$$

Dann gilt:

$$\xi \models (A \vee B)\,\mathbf{U}\,C \text{ aber weder } \xi \models A\,\mathbf{U}\,C \text{ noch } \xi \models B\,\mathbf{U}\,C$$

(b) + (c) gilt.

Sei ξ beliebige ω-Struktur, dann gilt:

$\xi \models A\,\mathbf{V}\,(B \wedge C)$ gdw. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\xi_n \models B \wedge C$ oder es existiert ein $k \in \mathbb{N}, k < n$ mit $\xi_k \models A$.

gdw. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: ($\xi_n \models B$ und $\xi_n \models C$) oder es existiert ein $k \in \mathbb{N}, k < n$ mit $\xi_k \models A$.

gdw. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: ($\xi \models B$ und es existiert ein $k \in \mathbb{N}, k < n$ mit $\xi_k \models A$) oder ($\xi \models C$ und es existiert ein $k \in \mathbb{N}, k < n$ mit $\xi_k \models A$).

gdw. (Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\xi \models B$ und es existiert ein $k \in \mathbb{N}, k < n$ mit $\xi_k \models A$), oder (für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\xi \models C$ und es existiert ein $k \in \mathbb{N}, k < n$ mit $\xi_k \models A$).

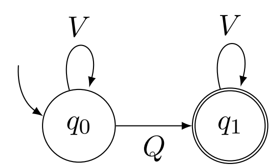
gdw. $\xi \models (A\,\mathbf{V}\,B) \wedge (A\,\mathbf{V}\,C)$

Zu Aufgabe 4

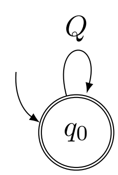
Wir verwenden hier die Mengenschreibweise vom Übungsblatt:

$$
\begin{array}{rcl}
V & = & \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p,q\}\}) \\
P & = & \{\{p\}, \{p,q\}\} \\
Q & = & \{\{q\}, \{p,q\}\} \\
PQ & = & \{\{p,q\}\}
\end{array}
$$

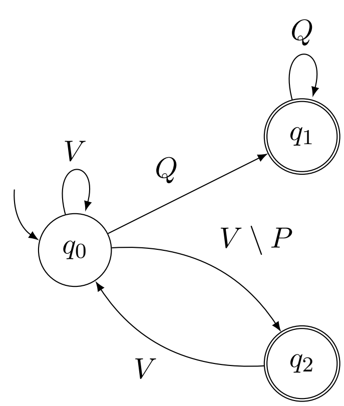
(a) Beobachtung: $\Diamond(p\,\mathbf{U}\,q)$ ist äquivalent zu $\Diamond q$



(b) Beobachtung: $\Box(p\,\mathbf{V}\,q)$ ist äquivalent zu $\Box q$



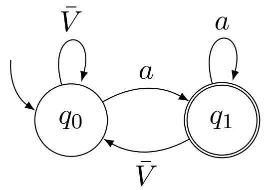
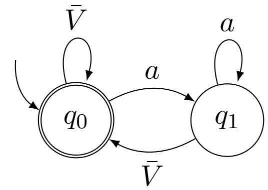
(c) Beobachtung: φ_c ist erfüllt, wenn q ab einem Zeitpunkt immer gilt, oder wenn $\neg p$ unendlich oft gilt.



Zu Aufgabe 5

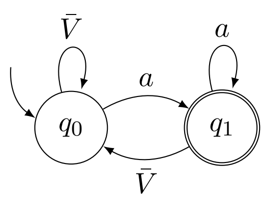
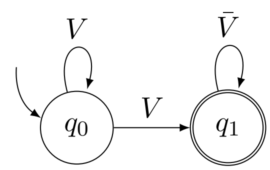
Definiere: $\bar{V} = V \setminus \{a\}$

(a)

	Automat A_1	Automat A_2
Automaten		
Reguläre Sprache	$L_1 = V^*a$	$L_2 = (V^*\bar{V}) = V^* \setminus L_1$
ω-Sprache	$L_1^\omega = \{w \in V^\omega : a \text{ unendlich oft in } w\}$ $= (V^*a)^\omega$	$L_2^\omega = \{w \in V^\omega : w \text{ endet nicht auf } a^\omega\}$ $= V^\omega \setminus (V^*a^\omega)$

L_1^ω und L_2^ω sind nicht zu einander komplementär: Das Wort $w = abababab...$ liegt im Schnitt.

(b)

	Automat A_1	Automat A_2
Automaten		
Reguläre Sprache	$L_1 = V^*a$	$L_2 = V^*V\bar{V}^*$
ω-Sprache	$L_1^\omega = \{w \in V^\omega : a \text{ unendlich oft in } w\}$	$L_2^\omega = \{w \in V^\omega : a \text{ nur endlich oft in } w\}$ $= V^\omega \setminus L_1^\omega$

L_1 und L_2 sind nicht zu einander komplementär. L_2 ist eine etwas kompliziert zu formulierende Sprache, aber man sieht leicht ein, dass das Wort a sowohl in L_1 als auch in L_2 liegt. Dagegen liegt das leere Wort $\epsilon \in V^*$ weder in L_1 noch in L_2.