Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Thorsten Bormer

Formale Systeme, WS 2010/2011

Lösungen zum Übungsblatt 2

Dieses Blatt wurde in der Übung am 12.11.2010 besprochen.

Zu Aufgabe 1

Ableitung:

$$\begin{array}{rcll}
 & \vdash & \neg\neg A \to (\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A) & \text{(Ax1)} \\
\{\neg\neg A\} & \vdash & (\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A) & \text{(DT)} \\
\{\neg\neg A\} & \vdash & (\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A) \to (\neg A \to \neg\neg\neg A) & \text{(Ax3)} \\
\{\neg\neg A\} & \vdash & (\neg A \to \neg\neg\neg A) & \text{(Mp)} \\
\{\neg\neg A\} & \vdash & (\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A) & \text{(Ax3)} \\
\{\neg\neg A\} & \vdash & \neg\neg A \to A & \text{(Mp)} \\
\{\neg\neg A\} & \vdash & A & \text{(DT)} \\
 & \vdash & \neg\neg A \to A & \text{(DT)}
\end{array}$$

Aus der Korrektheit des Hilbertkalküls folgt $\models \neg\neg A \to A$.

Zu Aufgabe 2

1. Schritt: Formel negieren

$$\neg((A \wedge (A \to B)) \to B)$$

2. Schritt: In KNF transformieren

$$\begin{array}{l}
\neg((A \wedge (A \to B)) \to B) \equiv \\
\neg(\neg(A \wedge (A \to B)) \vee B) \equiv \\
(A \wedge (A \to B)) \wedge \neg B \equiv \\
A \wedge (\neg A \vee B) \wedge \neg B
\end{array}$$

Alternative Schreibweise:

$$A \wedge (A \to B) \wedge (B \to \mathbf{0})$$

3. Schritt:

1. Zunächst Fakten markieren: A
   $\boxed{A} \wedge (\boxed{A} \to B) \wedge (B \to \mathbf{0})$

2. Wegen $A \to B$ muss B auch markiert werden:
   $\boxed{A} \wedge (\boxed{A} \to \boxed{B}) \wedge (\boxed{B} \to \mathbf{0})$

3. Aus der Markierung von B und $(\boxed{B} \to \mathbf{0})$ folgt die Unerfüllbarkeit der Formel.

Damit ist gezeigt, dass die ursprüngliche Formel $(A \wedge (A \to B)) \to B$ allgemeingültig ist.

Zu Aufgabe 3

(a) Die Formel $A \vee \neg A$ ist Horn und erfüllbar. Implikationsschreibweise:

$$A \rightarrow A$$

Modell: $I(A) = F$.

(b) Die Formel $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge \neg C$

ist nicht Horn (da die erste und dritte Disjunktion mehr als ein positives Literal hat).

Allerdings gehört diese Formel zu der sog. Formelklasse *Renamable Horn*. Das sind solche Formeln, die man in eine Hornformel transformieren kann, indem man für eine, mehrere oder auch alle der aussagenlogischen Variablen X in der Klausel (zugleich) alle positiven Vorkommen von X durch $\neg X$ ersetzt und alle negativen Vorkommen $\neg X$ durch X. Die Erfüllbarkeit der Formel bleibt dabei erhalten (evtl. Modelle der neuen und der alten Formel sind „Spiegelbilder“ voneinander). Die Erfüllbarkeit der neuen Hornformel und damit auch die Erfüllbarkeit der alten Formel) kann dann mit dem üblichen Markierungsalgorithmus getestet werden.

Vertauscht man in diesem Beispiel die Polarität der Literale A und C, so erhält man eine Hornformel:

$$(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge C \ .$$

Implikationsschreibweise:

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \wedge C \rightarrow A \\ A \wedge B \wedge C \rightarrow \mathbf{0} \\ C \end{array}$$

Die umbenannte Formel ist erfüllbar (Modell: $I(A) = F, I(B) = F, I(C) = T$), somit hat auch die ursprüngliche Formel ein Modell (mit entsprechend invertierter Polarität der Literale lautet das Modell: $I(A) = T, I(B) = F, I(C) = F$).

(c) Die Formel $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge \neg C$ ist weder Horn noch Renamable Horn. Diese Formel ist jedoch „fast“ Horn. In solchen Fällen ist es möglich, eine Fallunterscheidung über die Belegungen der „störenden“ Literale vorzunehmen und die Erfüllbarkeit der verbleibenden Hornformeln mit dem Markierungsalgorithmus zu entscheiden.

Das störende Literal ist hier A. Setzen wir zuerst $I(A) = F$, erhalten wir die Formel:

$$\begin{array}{l} B \\ B \rightarrow C \\ C \rightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

Diese ist unerfüllbar. Setzen wir nun $I(A) = W$, so erhalten wir die Formel:

$$\begin{array}{l} C \rightarrow B \\ C \rightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

Diese Formel ist erfüllbar und hat als Modell $I(B) = F$, $I(C) = F$. Da wir in der Fallunterscheidung $I(A) = W$ gesetzt haben, lautet das Gesamtmodell also: $I(A) = W, I(B) = F$, $I(C) = F$.

Zu Aufgabe 4

(a) (i) Zunächst Fakten markieren: P_1 und P_3
$(\boxed{P_1} \wedge P_2 \to \boxed{P_3}) \wedge (\boxed{P_1} \wedge \boxed{P_3} \to P_4) \wedge \boxed{P_1} \wedge (P_2 \to P_4) \wedge \boxed{P_3}$

(ii) Wegen $P_1 \wedge P_3 \to P_4$ muss P_4 auch markiert werden:
$(\boxed{P_1} \wedge P_2 \to \boxed{P_3}) \wedge (\boxed{P_1} \wedge \boxed{P_3} \to \boxed{P_4}) \wedge \boxed{P_1} \wedge (P_2 \to \boxed{P_4}) \wedge \boxed{P_3}$

(iii) Keine weitere Markierung möglich und keine Widersprüche $\Longrightarrow$ Erfüllbar

Bei dieser Hornformel ist erkennbar, dass jede Klausel ein positives Literal enthält und somit die konstante Interpretation $I_W \equiv W$, die jede Variable zu W auswertet, die Formel erfüllt.

(b) (i) Zunächst die Fakten markieren: P_5
$\boxed{P_5} \wedge (P_2 \wedge P_4 \to \mathbf{0}) \wedge (\boxed{P_5} \to P_1) \wedge (P_2 \wedge \boxed{P_5} \to P_4) \wedge (P_1 \to P_2)$

(ii) Wegen $P_5 \to P_1$ muss auch P_1 markiert werden.
$\boxed{P_5} \wedge (P_2 \wedge P_4 \to \mathbf{0}) \wedge (\boxed{P_5} \to \boxed{P_1}) \wedge (P_2 \wedge \boxed{P_5} \to P_4) \wedge (\boxed{P_1} \to P_2)$

(iii) Wegen $P_1 \to P_2$ muss auch P_2 markiert werden.
$\boxed{P_5} \wedge (\boxed{P_2} \wedge P_4 \to \mathbf{0}) \wedge (\boxed{P_5} \to \boxed{P_1}) \wedge (\boxed{P_2} \wedge \boxed{P_5} \to P_4) \wedge (\boxed{P_1} \to \boxed{P_2})$

(iv) Wegen $P_2 \wedge P_5 \to P_4$ muss auch P_4 markiert werden.
$\boxed{P_5} \wedge (\boxed{P_2} \wedge \boxed{P_4} \to \mathbf{0}) \wedge (\boxed{P_5} \to \boxed{P_1}) \wedge (\boxed{P_2} \wedge \boxed{P_5} \to \boxed{P_4}) \wedge (\boxed{P_1} \to \boxed{P_2})$

(v) In der Klausel $P_2 \wedge P_4 \to \mathbf{0}$ sind alle Variablen im Rumpf markiert, der Kopf enthält aber $\mathbf{0} \Longrightarrow$ Nicht erfüllbar

(c) Diese Formel enthält keine Fakten $\Longrightarrow$ Erfüllbar, z.B. durch die Belegung $I_F \equiv F$, die jede Variable zu F auswertet.

Zu Aufgabe 5

Unter Disjunktionen verstehen wir in diesem Kontext die Anzahl der konjunktiv verknüpften Teilterme der KNF. $(A \vee B \vee C) \wedge (D \vee E)$ enthält also zwei Disjunktionen, obwohl natürlich drei binäre Disjunktionsoperationen auftreten. (Die Zahlen unterscheiden sich aber nicht wesentlich)

(a) Diese Formel wird falsch, gdw. eine ungerade Anzahl von Variablen zu F ausgewertet werden:

$$val_I(A_n) = F \quad \text{gdw. } \#\{i \mid I(P_i) = F\} \text{ ungerade.}$$

Damit lässt sich $\neg A_n$ auch schreiben als:

$$\neg A_n \equiv \bigvee_{\substack{J \subseteq \{1,\ldots,n\},\\ \#J \text{ ungerade}}} \left(\bigwedge_{j \in J} \neg P_j \wedge \bigwedge_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus J} P_j \right)$$

daraus ergibt sich für A_n (in KNF):

$$A_n \equiv \bigwedge_{\substack{J \subseteq \{1,\ldots,n\},\\ \#J \text{ ungerade}}} \left(\bigvee_{j \in J} P_j \vee \bigvee_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus J} \neg P_j \right)$$

Dies ist bereits eine minimale KNF, da kein Zusammenführen von Klauseln möglich ist: Zwei Klauseln können sich nur in einer geraden Anzahl von Negationen unterscheiden.

Damit enthält obige KNF für A genau $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ Disjunktionen. Das sind $O(2^n)$ Disjunktionen.

(b) Wendet man das Verfahren der Vorlesung auf diese Formel an, sieht das in so aus (modulo der Assoziativität):

$$A_n = \underbrace{\underbrace{\underbrace{P_1 \leftrightarrow P_2}_{Q_1} \leftrightarrow P_3}_{Q_2} \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow P_{n-1}}_{Q_{n-2}} \leftrightarrow P_n$$

und führt zu folgenden Äquivalenzen

$$\begin{array}{rcl} Q_1 & \leftrightarrow & P_1 \leftrightarrow P_2 \\ Q_2 & \leftrightarrow & Q_1 \leftrightarrow P_3 \\ Q_3 & \leftrightarrow & Q_2 \leftrightarrow P_4 \\ & \vdots & \\ Q_{n-2} & \leftrightarrow & Q_{n-3} \leftrightarrow P_{n-1} \\ & & Q_{n-2} \leftrightarrow P_n \end{array}$$

Wegen (a) kann man von den ersten $n-2$ Formeln die KNF mit je 4 Disjunktionen bilden und die für $Q_{n-2} \leftrightarrow P_n$ mit 2 Disjunktionen. Insgesamt sind das also

$$(n-2) \cdot 4 + 2 = 4n - 6$$

Klauseln, nur $O(n)$ viele.

(c) Offizielle Antwort: Es ist unwahrscheinlich. Gäbe es nämlich eine solche effiziente Transformation, so wäre damit zugleich **P = NP** gezeigt. Das Erfüllbarkeitsproblem für eine beliebige Formel in KNF (SAT) ist NP-vollständig, für eine Formel in DNF ist es aber in linearer Zeit lösbar (einmal durchgehen und schauen, ob eine widerspruchsfreie Konjunktion dabei ist). Nehmen wir also an, man könnte eine beliebige konjunktive Formel in polynomieller Zeit (das ist mit effizient gemeint) in eine (kurze) disjunktive Normalform überführen, so könnte damit auch man durch polynomielle Reduktion das Erfüllbarkeitsproblem SAT in polynomieller Zeit lösen, es wäre in **NP**-hart und in **P**, woraus **P=NP** folgte.