Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Thorsten Bormer

Formale Systeme, WS 2010/2011

Lösungen zum Übungsblatt 4

Dieses Blatt wurde in der Übung am 26.11.2010 besprochen.

Zu Aufgabe 1

Abbildung 1 zeigt Tableaubeweise für beide Teilaufgaben.

Sei φ_a die Formel aus Teilaufgabe (a). Das Tableau für $0\varphi_a$ ist geschlossen; die Allgemeingültigkeit der Formel φ_a ist damit bewiesen.

Das Tableau für die Formel $0\varphi_b$ lässt sich auch im erschöpften Zustand nicht schließen, daher ist $\neg\varphi_b$ erfüllbar, φ_b also nicht allgemeingültig.

Die Abbildungen sind mit der Vorzeichen-Variante des Kalküls aus der Vorlesung erstellt und die Regelanwendungen darin markiert. Dabei steht eine rote Kante für eine α- und eine blaue für eine β-Erweiterung. Die jeweils letzten Formeln im Tableau von (b) gehen aus der β-Formel $1B \to C$ hervor.

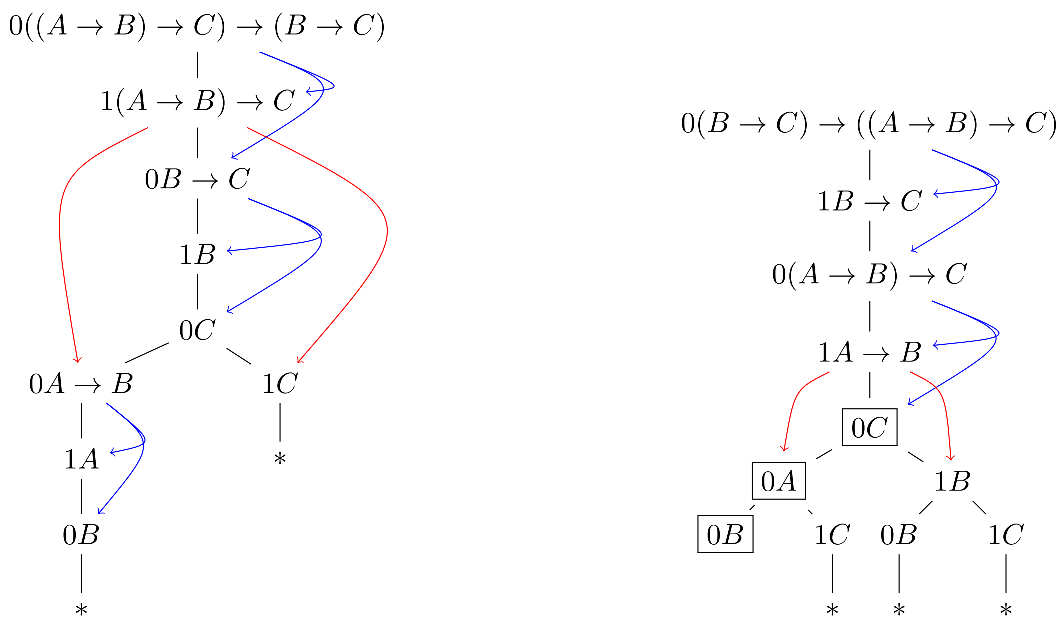

Abbildung 1: Tableaubeweise zu Aufgabe 4(a) (links) und 4(b) (rechts)

Ein erschöpftes, nicht geschlossenes Tableau hat einen Ast, der nicht geschlossen werden kann. Dieser Erlaubt das Ablesen einer Interpretation, die die Wurzelformel erfüllt: Setze für jede Variable $P \in \Sigma$

- wenn $0P$ auf dem Ast vorkommt $I(P) := F$,
- wenn $1P$ auf dem Ast vorkommt $I(P) := W$.
- andernfalls $I(P)$ beliebig.

Zur Begründung siehe Lemma 3.34 im Skript.

Insbesondere wird die Wurzel des Baumes erfüllt, das Negat der Formel, die auf Allgemeingültigkeit überprüft werden soll. Für diese Formel ist die Belegung also ein Gegenbeispiel zur Allgemeingültigkeit.

Für (b) ist das der Fall für die Belegung I mit $I(A) = I(B) = I(C) = F$. Für diese gilt: $\mathrm{val}_I(\varphi_b) = F$.

Zu Aufgabe 2

(a)

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{1(A \leftrightarrow B)} \\ \hline 1A & 0A \\ 1B & 0B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{0(A \leftrightarrow B)} \\ \hline 1A & 0A \\ 0B & 1B \end{array}$$

(b) Es ist zu zeigen: Für eine beliebige Interpretation I gilt

$$\mathrm{val}_I(1(A \leftrightarrow B)) = W \qquad \text{daraus folgt} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{val}_I(1A) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(1B) = W \\ \text{oder} \\ \mathrm{val}_I(0A) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(0B) = W \end{array}$$

Die Behauptung ergibt sich aus:

$$\begin{array}{l} \quad \mathrm{val}_I(1(A \leftrightarrow B)) = W \\ \Rightarrow \mathrm{val}_I(A \leftrightarrow B) = W \\ \Rightarrow \mathrm{val}_I((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) = W \\ \Rightarrow \mathrm{val}_I(A \wedge B) = W \text{ oder } \mathrm{val}_I(\neg A \wedge \neg B) = W \\ \Rightarrow \mathrm{val}_I(A) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(B) = W \text{ oder } \mathrm{val}_I(\neg A) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(\neg B) = W \\ \Rightarrow \mathrm{val}_I(1A) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(1B) = W \text{ oder } \mathrm{val}_I(0A) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(0B) = W \end{array}$$

Analog ist für die zweite Regel zu zeigen, dass

$$\mathrm{val}_I(0(A \leftrightarrow B)) = W \qquad \text{daraus folgt} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{val}_I(1A) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(0B) = W \\ \text{oder} \\ \mathrm{val}_I(0A) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(1B) = W \end{array}$$

Die Behauptung ergibt sich aus:

$$\begin{array}{l} \quad \mathrm{val}_I(0(A \leftrightarrow B)) = W \\ \Rightarrow \mathrm{val}_I(A \leftrightarrow B) = F \\ \Rightarrow \mathrm{val}_I((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)) = F \\ \Rightarrow \mathrm{val}_I(\neg A \vee B) = F \text{ oder } \mathrm{val}_I(\neg B \vee A) = F \\ \Rightarrow \mathrm{val}_I(\neg A) = F \text{ und } \mathrm{val}_I(B) = F \text{ oder } \mathrm{val}_I(\neg B) = F \text{ und } \mathrm{val}_I(A) = F \\ \Rightarrow \mathrm{val}_I(A) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(B) = F \text{ oder } \mathrm{val}_I(B) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(A) = F \\ \Rightarrow \mathrm{val}_I(A) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(\neg B) = W \text{ oder } \mathrm{val}_I(B) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(\neg A) = W \\ \Rightarrow \mathrm{val}_I(1A) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(0B) = W \text{ oder } \mathrm{val}_I(1B) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(0A) = W \end{array}$$

Zu Aufgabe 3

(a) Die Anforderungen lassen sich wie folgt in Aussagenlogik formalisieren:

Zu jeder Mahlzeit muß es Brot geben, wenn kein Dessert gereicht wird.	$\neg D \to B$
Wird Brot und Dessert serviert, darf es dazu selbstverständlich keine Suppe geben.	$B \wedge D \to \neg S$
Wenn aber Suppe gereicht wird, oder kein Dessert gereicht wird, darf es auch kein Brot geben.	$S \vee \neg D \to \neg B$

(b) Abbildung 2 zeigt ein voll expandiertes (vorzeichenloses) Tableau für die Konjunktion der in Teilaufgabe (a) angegebenen Formeln.

Das Tableau hat fünf offene Äste, jeder davon ergibt ein mögliches Modell der Formel. Insgesamt gibt es drei verschiedene Modelle:

- $I(B) = W \qquad I(D) = W \qquad I(S) = F$
- $I(B) = F \qquad I(D) = W \qquad I(S) = F$
- $I(B) = F \qquad I(D) = W \qquad I(S) = W$

Zu Aufgabe 4

Der Wurzelknoten eines Sequenzenbeweises für eine Formel φ ist markiert mit " $\Rightarrow \varphi$".

Wenn man die Regeln aus der Vorlesung/Skript anwendet, kommt man zu einem Beweisbaum ähnlich zu dem in Abbildung 3. Da alle Blätter des Beweises Axiome sind, ist die Ausgangsformel damit bewiesen.

Im Baum ist jeweils die Formel markiert, auf die die nachfolgende Regel angewendet wird.

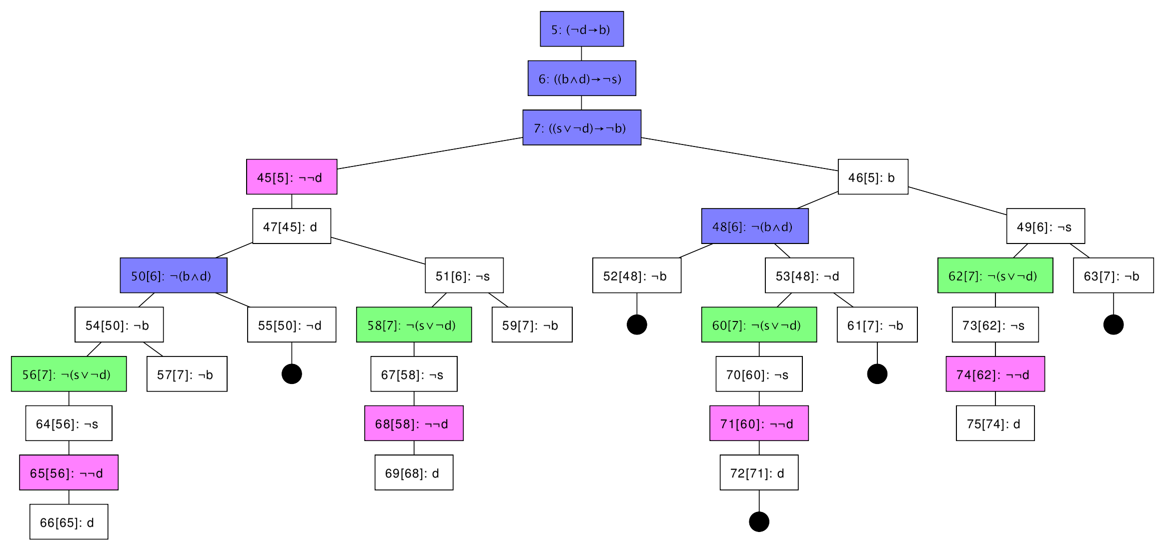

Abbildung 2: Voll expandiertes Tableau zu Aufgabe 3

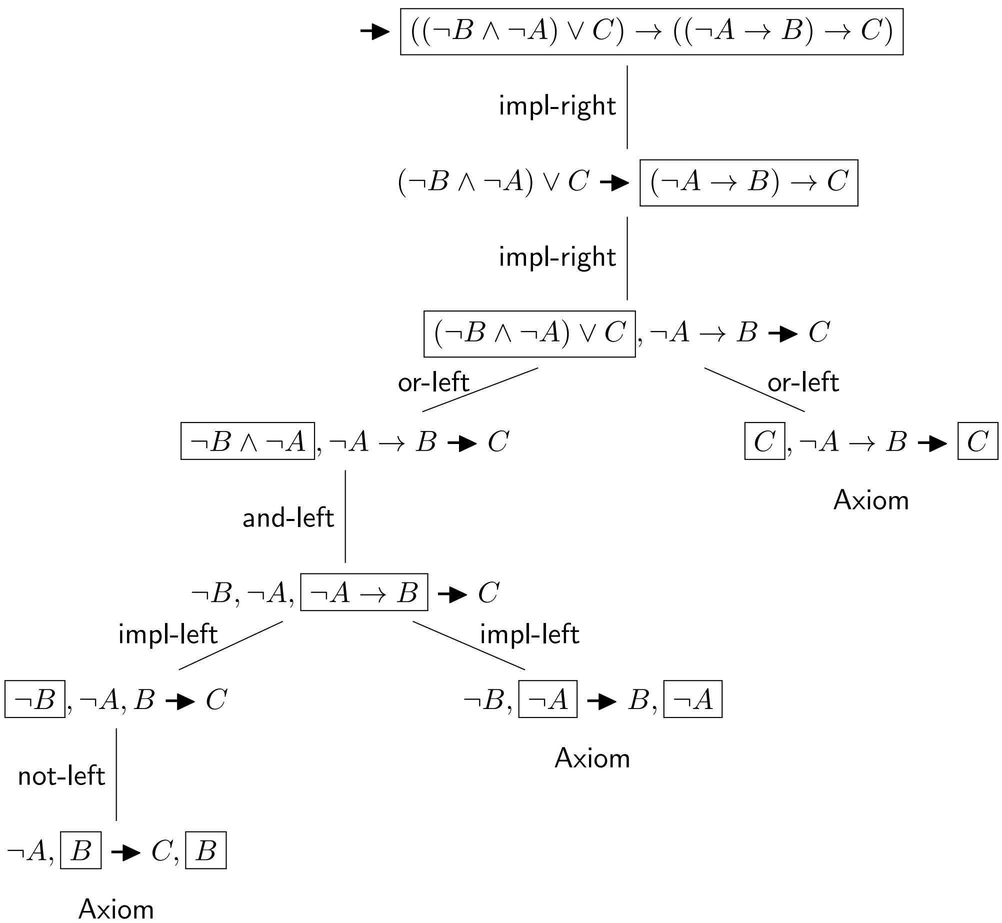

Abbildung 3: Sequenzenbeweisbaum zu Aufgabe 4