Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Thorsten Bormer

Formale Systeme, WS 2010/2011

Lösungen zum Übungsblatt 5

Dieses Blatt wurde in der Übung am 26.11.2010 besprochen.

Zu Aufgabe 1

Wähle die Einerklausel $\{\neg P\}$.

Ergebnis der Vereinfachung von S mit $\{\neg P\}$ ist die Menge S', bestehend aus:

$$\begin{array}{lll} \{\, Q,\ T \,\} & \{\, \neg Q,\ R \,\} & \{\, \neg R,\ S \,\} \\ \{\, \neg R,\ \neg S,\ T \,\} & \{\, \neg R,\ \neg T \,\} & \{\, R,\ \neg T \,\} \end{array}$$

Die Menge S' enthält keine Einerklauseln. Wir widerlegen $S' \cup \{Q\}$ und $S' \cup \{\neg Q\}$.

Zur Widerlegung von $S' \cup \{Q\}$:
Ergebnis der Vereinfachung von $S' \cup \{Q\}$ mit $\{Q\}$ ist:

$$\{\, R \,\} \quad \{\, \neg R,\ S \,\} \quad \{\, \neg R,\ \neg S,\ T \,\} \quad \{\, \neg R,\ \neg T \,\} \quad \{\, R,\ \neg T \,\}$$

Ergebnis der Vereinfachung dieser Klauselmenge mit $\{R\}$ ist:

$$\{\, S \,\} \quad \{\, \neg S,\ T \,\} \quad \{\, \neg T \,\}$$

Ergebnis der Vereinfachung dieser Klauselmenge mit $\{S\}$ ist:

$$\{\, T \,\} \quad \{\, \neg T \,\}$$

Ergebnis der Vereinfachung dieser Klauselmenge mit $\{T\}$ ist:

$$\Box$$

Damit ist, da nun die leere Klausel enthalten ist, die Klauselmenge $S' \cup \{Q\}$ widerlegt.

Zur Widerlegung von $S' \cup \{\neg Q\}$:
Ergebnis der Vereinfachung von $S' \cup \{\neg Q\}$ mit $\{\neg Q\}$ ist:

$$\{\, T \,\} \quad \{\, \neg R,\ S \,\} \quad \{\, \neg R,\ \neg S,\ T \,\} \quad \{\, \neg R,\ \neg T \,\} \quad \{\, R,\ \neg T \,\}$$

Ergebnis der Vereinfachung dieser Klauselmenge mit $\{T\}$ ist:

$$\{\, \neg R,\ S \,\} \quad \{\, \neg R \,\} \quad \{\, R \,\}$$

Ergebnis der Vereinfachung dieser Klauselmenge mit $\{R\}$ ist:

$$\{\, S \,\} \quad \Box$$

Damit ist, da nun die leere Klausel enthalten ist, auch die Klauselmenge $S' \cup \{\neg Q\}$ widerlegt.

Zu Aufgabe 2

(a) $j(f(x), g(x), h(z), k)$ ist ein wohlgeformter Term.

(b) $\forall y \exists p\, p(y)$ ist weder Term noch Formel. In PL1 ist es nicht möglich, über Prädikatensymbole zu quantifizieren ($\exists p$).

(c) $\forall x \forall z\, (g(f(z), f(y)) \to z)$ ist weder Term noch Formel. Implikation zwischen Termen ist nicht wohlgeformt.

(d) $\forall x \exists y\, (p(f(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{gebunden}}}{x})) \to q(\overset{\substack{\text{gebunden} \\ \downarrow}}{y}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{frei}}}{z}))$ ist eine Formel. Die Variablenvorkommen sind entsprechend markiert.

Zu Aufgabe 3

(a) (i) Nicht kollisionsfrei, da
- x kommt in $\sigma(y)$ vor.
- y kommt im Wirkungsbereich des Quantors $\forall x$ vor.

(ii) Kollisionsfrei, das zweite Auftreten von x (dort gebundene Variable!) wird nicht ersetzt.

$$\sigma(F) = \exists y(p(y, f(g(x), c)) \lor \forall x \exists z(f(z, c) \doteq f(c, x)))$$

(iii) Kollisionsfrei (das zweite Vorkommen von y wird nicht ersetzt)

$$\sigma(F) = p(x, g(x)) \to \forall x(q(f(x, g(y))) \lor \exists y(q(f(x, y))))$$

(b) (i) unifizierbar. Robinson ergibt:

$\mu_0 = id$	$\mu_0(F) = f(\boxed{x}, z, z)$	$\mu_0(G) = f(\boxed{g(a, y)}, h(v), h(y))$
$\mu_1 = \{x/g(a, y)\}$	$\mu_1(F) = f(g(a, y), \boxed{z}, z)$	$\mu_1(G) = f(g(a, y), \boxed{h(v)}, h(y))$
$\mu_2 = \{x/g(a, y), z/h(v)\}$	$\mu_2(F) = f(g(a, y), h(v), h(\boxed{v}))$	$\mu_2(G) = f(g(a, y), h(v), h(\boxed{y}))$
$\mu_3 = \{x/g(a, y), z/h(y), v/y\}$	$\mu_3(F) = \mu_3(G) = f(g(a, y), h(y), h(y))$	

Man muss beachten, dass man weitere Ersetzungen nicht einfach zur Menge hinzunehmen kann, sondern auch auf die darin enthaltenen Terme anwenden muss.
Beispielsweise: $\mu_3 = \{x/g(a, y), z/h(\boldsymbol{v})\} \circ \{v/\boldsymbol{y}\} = \{x/g(a, y), z/h(\boldsymbol{y}), v/y\}$

(ii) unifizierbar. Robinson ergibt:

$\mu_0 = id$	$\mu_0(F) = f(g(\boxed{x}, z), z, h(b, x))$
	$\mu_0(G) = f(g(\boxed{a}, y), h(v, a), y)$
$\mu_1 = \{x/a\}$	$\mu_1(F) = f(g(a, \boxed{z}), z, h(b, a))$
	$\mu_1(G) = f(g(a, \boxed{y}), h(v, a), y)$
$\mu_2 = \{x/a, z/y\}$	$\mu_2(F) = f(g(a, y), \boxed{y}, h(b, a))$
	$\mu_2(G) = f(g(a, y), \boxed{h(v, a)}, y)$
$\mu_3 = \{x/a, z/h(v, a), y/h(v, a)\}$	$\mu_3(F) = f(g(a, h(v, a)), h(v, a), h(\boxed{b}, a))$
	$\mu_3(G) = f(g(a, h(v, a)), h(v, a), h(\boxed{v}, a))$
$\mu_4 = \{x/a, z/h(b, a), y/h(b, a), v/b\}$	$\mu_4(F) = \mu_4(G) = f(g(a, h(b, a)), h(b, a), h(b, a))$

(iii) Im ersten Schritt des Robinsonalgorithmus erhält man:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \{x/f(y)\}\\ \mu_1(F) &= g(f(y),y)\\ \mu_1(G) &= g(f(y),f(f(y)))\end{aligned}$$

Nun aber muss der Algorithmus abbrechen, weil $D(\{\mu_1(F),\mu_1(G)\}) = \{y, f(f(y))\}$ und die sind nicht unifizierbar, weil y eine Variable ist und in $f(f(y))$ auftritt.

(iv) unifizierbar. Der Robinsonalgorithmus mit Zwischenergebnissen:

$$\begin{array}{lll} \mu_0 = id & \mu_0(F) = f(\boxed{g(y)}, h(y, g(y))) & \mu_0(G) = f(\boxed{z}, h(g(x), g(g(x)))) \\ \mu_1 = \{z/g(y)\} & \mu_1(F) = f(g(y), h(\boxed{y}, g(y))) & \mu_1(G) = f(g(y), h(\boxed{g(x)}, g(g(x)))) \\ \mu_2 = \{z/g(g(x)), y/g(x)\} & \multicolumn{2}{c}{\mu_2(F) = \mu_2(G) = f(g(g(x)), h(g(x), g(g(x))))} \end{array}$$

Zu Aufgabe 4

Zu zeigen ist:

widerlege(S) endet mit der Ausgabe "S widersprüchlich" $\Rightarrow$ S ist unerfüllbar.

Das Davis-Putnam-Verfahren endet nur dann mit der Ausgabe "S widersprüchlich", wenn sich in einem Reduktionsschritt die leere Klausel ableiten lässt.

Der Reduktionsschritt besteht aus den zwei Schritten:

- Lasse alle Klauseln weg, die K als Literal enthalten, sowie
- lasse in allen übrigen Klauseln das zu K komplementäre Literal weg.

Der erste Schritt, das Weglassen von Klauseln, kann nicht dazu führen, dass das Verfahren inkorrekt ist: lässt sich aus den verbleibenden Klauseln die leere Klausel ableiten, so gelingt dies auch immer mit der ursprünglichen Klauselmenge.

Der zweite Schritt entspricht einer 1-Resolution mit anschliessendem Weglassen der Klauseln über die resolviert wurde. Aus der Korrektheit der 1-Resolution und obiger Aussage über das Weglassen von Klauseln folgt die Korrektheit dieses Schritts.

Lässt sich nicht sofort aus der Klauselmenge S per Reduktion die leere Klausel ableiten, so kommt die Splitting-Regel zur Anwendung:

falls S keine Einerklausel enthält, wähle eine Variable P ; widerlege(S_P) ; widerlege($S_{\neg P}$).

Die Korrektheit dieses Schritts folgt aus der Tatsache, dass bei wiederholter Anwendung dieser Regel eine Klauselmenge entsteht, die nur durch Anwendung (des bereits als korrekt gezeigten) Reduktionsschritts möglicherweise mit der Ausgabe "S widersprüchlich" endet. Die Korrektheit der Komposition der Aufrufe von widerlege(S_P) und widerlege($S_{\neg P}$) folgt dann aus:

Die Ausgabe von widerlege(S_P) ; widerlege($S_{\neg P}$) ist "S widersprüchlich" gdw. die Ausgabe von sowohl widerlege(S_P) als auch widerlege($S_{\neg P}$) "S widersprüchlich" ist. Damit gilt (unter Annahme der Korrektheit der beiden einzelnen Aufrufe von "widerlege"): S_P und $S_{\neg P}$ sind beide unerfüllbar. Daraus folgt bereits, dass auch S unerfüllbar ist und damit die Korrektheit des Verfahrens.

Zu Aufgabe 5

$$\begin{aligned} s_n &:= g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\ t_n &:= g(c, f(x_1, x_1), f(x_2, x_2), \ldots, f(x_{n-1}, x_{n-1})) \end{aligned}$$

Die Länge $|s_n|$ von s_n ist $n+1$ und $|t_n|$ ist $3n-1$, also linear in n (Klammern und Kommata nicht gezählt). Der allgemeinste Unifikator instantiiert x_1 mit c und x_i+1 mit $f(x_i, x_i)$ $(1 \leq i < n)$. Darum gilt

$$\begin{aligned} |\sigma(x_1)| &= 1 \\ |\sigma(x_i + 1)| &= 1 + 2 \cdot |\sigma(x_i)| \qquad \text{für } 1 \leq i < n \end{aligned}$$

und also

$$|\sigma(x_i)| = 2^i - 1 \qquad \text{für } 1 \leq i \leq n$$

Schließlich

$$\begin{aligned} |\sigma(s_n)| = |\sigma(t_n)| &= 1 + \sum_{i=1}^{n} (2^i - 1) \\ &= 2^{n+1} - n + 1 \end{aligned}$$

Die Länge von $\sigma_n(s_n) = \sigma(t_n)$ ist also exponentiell in n.