Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Thorsten Bormer

Formale Systeme, WS 2010/2011

Lösungen zu Übungsblatt 7

Dieses Blatt wurde in der Übung am 23.12.2010 besprochen.

Zu Aufgabe 1

(a) (i) $G = \exists x(p(x))$, denn $G_{\text{sko}} = p(c)$ und $\neg p(c) \land \exists x(p(x))$ ist erfüllbar.
Ein Modell ist $\mathcal{D} = (\{a, b\}, I(p) = \{a\}, I(c) = b)$

(ii) Z.B. $G = p = G_{\text{sko}}$ (mit p 0-stelliges Prädikat). Für jede variablenfreie Formel G gilt $G = G_{\text{sko}}$, also insbondere auch $\neg G_{\text{sko}} \land G = \neg G \land G \equiv \mathbf{0}$.

(iii) $G = \exists x(p(x))$, denn $G_{sko} = p(c)$ und $G \to G_{sko} \equiv \exists x(p(x)) \to p(c)$. Die Interpretation $\mathcal{D} = (\{a, b\}, I(p) = \{a\}, I(c) = b)$ ist z. B. kein Modell von $G \to G_{\text{sko}}$.

(b) Sei G obdA in Pränexnormalform und die gebundenen Variablen verschieden. Lemma 4.36 im Skript besagt:

> Sei Σ eine Signatur, $\mathcal{D}$ eine Interpretation für Σ, β eine Belegung und σ eine für A kollisionsfreie Substitution mit $\sigma(y) = y$ für alle Variablen $y \neq x$, dann gilt:
>
> $$\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A) \to \exists x A) = W$$

Sei n die Anzahl der Existenzquantoren in G. Die Formel G_{sko} wird durch n Skolemisierungsschritte aus G gewonnen. Seinen $G_0, \ldots, G_n$ die Zwischenschritte mit $G_0 = G$ und $G_n = G_{sko}$.

Betrachten wir nun den allgemeinen Schritt $G_i \rightsquigarrow G_{i+1}$ für $0 \leq i < n$.

Jedes G_i ist von der Form $G_i = \forall x_1 \ldots \forall x_{l_i} \exists x\ \varphi_i$ mit $l_i \geq 0$ voranstehenden Allquantoren für ein geeignetes φ_i.

Für G_{i+1} gilt nach der Skolemisierung von x: $G_{i+1} = \forall x_1 \ldots \forall x_{l_i}\ \sigma(\varphi_i)$ wobei $\sigma(x) = f_i(x_1, \ldots, x_{l_i})$ für eine neue Skolemfunktion f_i ist. σ entspricht auf den Variablen verschieden von x der Identität und ist wegen der Annahme über die Variablen kollisionsfrei.

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 4.36 erfüllt und es gilt, dass $\sigma(\varphi) \to \exists x\ \varphi$ allgemeingültig ist.

Wegen (mehrfacher Anwendung) des Lemmas unten gilt auch $(G_i)_{\text{sko}} = G_{i+1} \to G_i$ ist allgemeingültig. Mit der Transitivität von $\to$ folgt: $G_n \to G_0$ ist allgemeingültig. $\square$

Lemma: Wenn $A \to B$ allgemeingültig ist, dann ist auch $\forall x\ A \to \forall x\ B$ allgemeingültig.

Beweis: Sei (D, I) eine Interpretation und β eine Variablenbelegung, $A \to B$ allgemeingültig und gelte $\text{val}_{(I,\beta)}(\forall x\ A) = W$. Dann ist zu zeigen, dass $\text{val}_{(I,\beta)}(\forall x\ B) = W$.

Es gilt, dass $\text{val}_{(I,\beta_x^d)}(A) = W$ für alle $d \in D$ und wegen der Allgemeingültigkeit von $A \to B$ damit auch $\text{val}_{(I,\beta_x^d)}(B) = W$ für alle d. Das wiederum impliziert $\text{val}_{(I,\beta)}(\forall x\ B) = W$. $\square$

Zu Aufgabe 2

Es gilt im Allgemeinen **nicht** $G \equiv G_{\text{sko}}$, wie uns Aufgabe 1 zeigt. Es gilt lediglich $G \overset{\circ}{\equiv} G_{\text{sko}}$: G hat ein Modell genau dann, wenn G_{sko} ein Modell hat („equisatisfiability"). Das Zeichen $\equiv$ darf nicht bei Skolemisierung verwendet werden.

Es gibt verschiedene unterschiedliche Lösungen für diese Aufgaben, aber man sollte immer versucht sein, Skolemsymbole mit möglichst wenig Argumenten zu erzeugen, weil das nachfolgende Beweise effizienter gestalten lässt (weniger Unifikation notwendig!).

Nimmt man die Aufgabenstellung wörtlich, so muss man eigentlich zuerst Pränexnormalform herstellen und danach erst skolemisieren. In der Praxis ist das aber zumeist ungünstig (insofern ist die Aufgabe schlecht formuliert). Besser ist es, zuerst zu skolemisieren und dann die Quantoren nach außen zu ziehen. Dass letztere Reihenfolge besser ist, zeigt der Vergleich der Teilaufgaben (a) und (c). Mehrere Existenzquantoren werden von außen nach innen eliminiert.

(a)

$$
\begin{array}{cll}
 & (\forall x p(x) \to \forall x q(x)) \to \forall x (p(x) \to q(x)) & \\
\equiv & (\forall x p(x) \to \forall y q(y)) \to \forall z (p(z) \to q(z)) & \text{Umbenennen der gebundenen Variablen} \\
\equiv & \neg(\neg\forall x p(x) \lor \forall y q(y)) \lor \forall z(\neg p(z) \lor q(z)) & \text{Implikationen auflösen} \\
\equiv & (\forall x p(x) \land \exists y \neg q(y)) \lor \forall z(\neg p(z) \lor q(z)) & \text{Implikationen nach innen schieben} \\
\overset{\circ}{\equiv} & (\forall x p(x) \land \neg q(c)) \lor \forall z(\neg p(z) \lor q(z)) & \text{Skolemisieren} \\
\equiv & \forall x \forall z((p(x) \land \neg q(c)) \lor (\neg p(z) \lor q(z)) & \text{Allquantoren nach außen ziehen} \\
\equiv & \forall x \forall z((p(x) \lor \neg p(z) \lor q(z)) \land (\neg q(c) \lor \neg p(z) \lor q(z)) & \text{Matrix in KNF überführen}
\end{array}
$$

(b)

$$
\begin{array}{cll}
 & \exists x(\forall y\ p(x,y) \lor \exists z(p(x,z) \land \forall x\ p(z,x))) & \\
\equiv & \exists x(\forall y\ p(x,y) \lor \exists z(p(x,z) \land \forall w\ p(z,w))) & \text{Umbenennen gebundener Variablen} \\
\overset{\circ}{\equiv} & \forall y\ p(c,y) \lor (p(c,d) \land \forall w\ p(d,w)) & \text{Skolemisieren} \\
\equiv & \forall y \forall w (p(c,y) \lor (p(c,d) \land p(d,w))) & \text{Allquantoren nach außen ziehen} \\
\equiv & \forall y \forall w ((p(c,y) \lor p(c,d)) \land (p(c,y) \lor p(d,w))) & \text{Matrix in KNF}
\end{array}
$$

(c) Vor der Skolemisierung können auch erst die Allquantoren nach außen gezogen werden. Dadurch wird bei der Skolemisierung ein Skolem-Term $f(x,z)$ statt einer Konstanten eingeführt. Diese Lösung ist strukturell (nicht nur durch Umbenennung!) verschieden von der Lösung in (a).

$$
\begin{array}{cll}
 & (\forall x p(x) \to \forall x q(x)) \to \forall x (p(x) \to q(x)) & \\
\equiv & (\forall x p(x) \to \forall y q(y)) \to \forall z (p(z) \to q(z)) & \text{Umbenennen der gebundenen Variablen} \\
\equiv & \neg(\neg\forall x p(x) \lor \forall y q(y)) \lor \forall z(\neg p(z) \lor q(z)) & \text{Implikationen auflösen} \\
\equiv & (\forall x p(x) \land \exists y \neg q(y)) \lor \forall z(\neg p(z) \lor q(z)) & \text{Implikationen nach innen schieben} \\
\equiv & \forall x \forall z((p(x) \land \exists y \neg q(y)) \lor (\neg p(z) \lor q(z)) & \text{Allquantoren nach außen ziehen} \\
\overset{\circ}{\equiv} & \forall x \forall z((p(x) \land \neg q(f(x,z))) \lor (\neg p(z) \lor q(z)) & \text{Skolemisieren} \\
\equiv & \forall x \forall z((p(x) \lor \neg p(z) \lor q(z)) \land (\neg q(f(x,z)) \lor \neg p(z) \lor q(z)) & \text{Matrix in KNF überführen}
\end{array}
$$

Zu Aufgabe 3

Das Herbrand-Universum ist $D_H = \{\underbrace{f(f(\ldots f(}_{n}b)\ldots)) \mid n \in \mathbb{N}\}$

(a) Unendlich[1] viele. Für $I(p)$ kann jede beliebige Teilmenge der (unendlich großen) Menge D_H gewählt werden. $I(f)$ ist nicht veränderbar.

(b) 3, nämlich (D, I_0), (D, I_1) und (D, I_2) mit

$$\begin{array}{llllll} I_0(p) = \{ & b, & f(b), & f(f(b)), & f(f(f(b))), \ldots\} = D_H \\ I_1(p) = \{ & & f(b), & f(f(b)), & f(f(f(b))), \ldots\} = D_H \setminus \{b\} \\ I_2(p) = \{ & & & f(f(b)), & f(f(f(b))), \ldots\} = D_H \setminus \{b, f(b)\} \end{array}$$

(c) Um das gewünschte Resultat zu erzielen, muss man ein Universum wählen, in dem nicht jedes Element durch f und b dargestellt werden kann.

Sei also $D = D_H \cup \{c\}$. Es gibt keinen Grundterm t, für den $\mathrm{val}(t) = c$ in Herbrand-Interpretationen gelten kann. Ist nun $I(p) = D_H$ (also ohne c) und $I(f)(c) = c$ und I identisch zu I_H, wo letzteres definiert ist, so gilt offensichtlich (1), da diese Formel keine Bedingungen an c stellt. (2) gilt jedoch nicht, da $\mathrm{val}_{I,\beta}(p(f(f(x)))) = F$ für $\beta(x) = c$ ist.

Alternative Lösung: Wähle (D, I) mit $D = \mathbb{Z}$, $I(f) : x \mapsto x+1$, $I(b) = 0$, und $I(p) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$. Auch dann ist (1) erfüllt, nicht aber (2).

Zu Aufgabe 4

In folgendem Widerspruchsbeweis benutzen wir den Endlichkeitssatz als Spezialfall des Kompaktheitssatzes, um zu zeigen, dass es keine Formel F wie in der Aufgabe gefordert geben kann.

Angenommen, es gäbe eine Formel F, die genau in denen Interpretationen (D, I) zu W auswertet, in denen der durch (D, I) beschriebene Graph: $(D, I(\mathit{kante}))$ zusammenhängend ist.

Seien $a, b \in \Sigma$. Die Aussage:

“es existiert kein Pfad zwischen a und b der Länge n $(n \in \mathbb{N}, n > 0)$”

wird formalisiert durch die Formel:

$$A_n := \neg(a \doteq b) \wedge \neg\exists x_1 \cdots \exists x_{n-1}((\mathit{kante}(a, x_1) \wedge \ldots \wedge \mathit{kante}(x_{n-1}, b)) \vee (\mathit{kante}(b, x_{n-1}) \wedge \ldots \wedge \mathit{kante}(x_1, a))) \ .$$

Betrachten wir nun die Formelmenge

$$F \cup \{A_n \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\} \ .$$

Jede endliche Teilmenge E dieser Menge hat ein Modell. Sei nämlich A_m die Formel mit dem größten in E vorkommenden Index. Dann ist

$$a^I = a_0$$
$$b^I = a_{m+1}$$
$$\mathit{kante}^I = \{(a_0, a_1), \cdots, (a_m, a_{m+1})\}$$

ein Modell von E.

Nach dem Endlichkeitssatz müsste es also ein Modell von $F \cup \{A_n \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\}$ geben. Dies führt zum Widerspruch: F sagt aus, dass der Graph zusammenhängend sein muss und die Formelmenge $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\}$ beschreibt, dass es zwischen a^I und b^I keinen Pfad irgendeiner Länge gibt, der Graph also nicht zusammenhängend sein kann.

[1] sogar überabzählbar unendlich