Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Thorsten Bormer

Formale Systeme, WS 2010/2011

Lösungen zu Übungsblatt 8

Dieses Blatt wurde in der Übung am 23.12.2010 besprochen.

Zu Aufgabe 1

Nummeriere die gegebenen Klauseln (1) bis (5).

(6)	$\{\neg p(f(x_1), x_4), p(x_1, x_4)\}$	[1, 2]	$\mu = \{x_2/x_1, x_3/f(x_1)\}$
(7)	$\{p(f(x_1), x_1)\}$	[1, 5]	$\mu = \{x_5/f(x_1), x_6/x_1\}$
(8)	$\{p(x_1, x_1)\}$	[6, 7]	$\mu = \{x_4/x_1\}$
(9)	$\{\neg p(d, g(x_7))\}$	[8, 4]	$\mu = \{x_1/c\}$
(10)	$\{\neg p(g(x_7, d))\}$	[9, 5]	$\mu = \{x_5/d, x_6/g(x_7)\}$
(11)	$\Box$	[10, 3]	$\mu = \{x_8/d, x_7/d\}$

Hinweis: Es ist hilfreich, wenn man in einigen Klauseln Struktur erkennt: Klausel (2) besagt, dass p transitiv ist und (5), dass p symmetrisch ist. Dies kann man verwenden, um $p(x, x)$ zu resolvieren. Eine zweite Anwendung der Symmetrie sorgt dann für den endgültigen Abschluss.

Zu Aufgabe 2

(a) Vorbereitung der Resolution:

$$\begin{aligned}
&\neg((\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)) \to \forall x\, (p(x) \vee q(x))) \equiv \\
&(\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)) \wedge \exists x\, (\neg p(x) \wedge \neg q(x)) \overset{\circ}{\equiv} \\
&(\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)) \wedge \neg p(sk_0) \wedge \neg q(sk_0) \equiv \\
&\forall x_1 \forall x_2\, (p(x_1) \vee q(x_2)) \wedge \neg p(sk_0) \wedge \neg q(sk_0)
\end{aligned}$$

Ableitung:

(1)	$\{p(x_1), q(x_2)\}$	
(2)	$\{\neg p(sk_0)\}$	
(3)	$\{\neg q(sk_0)\}$	
(4)	$\{p(x_3)\}$	$[1, 3, \mu = \{x_2/sk_0\}]$
(5)	$\Box$	$[4, 2, \mu = \{x_3/sk_0\}]$

(b) Vorbereitung der Resolution:

$$\begin{aligned}
&\neg\big((p(a) \wedge \forall x\, (p(x) \to p(f(x)))) \to p(f(f(f(f(a)))))\big) \equiv \\
&p(a) \wedge \forall x\, (\neg p(x) \vee p(f(x))) \wedge \neg p(f(f(f(f(a))))) \equiv \\
&\forall x\, (p(a) \wedge (\neg p(x) \vee p(f(x)) \wedge \neg p(f(f(f(f(a))))))
\end{aligned}$$

Ableitung:

(1)	$\{p(a)\}$	
(2)	$\{\neg p(x), p(f(x))\}$	
(3)	$\{\neg p(f(f(f(f(a)))))\}$	
(4)	$\{\neg p(f(f(f(a))))\}$	$[3, 2, \mu = \{x/f(f(f(a)))\}]$
(5)	$\{\neg p(f(f(a)))\}$	$[4, 2, \mu = \{x/f(f(a))\}]$
(6)	$\{\neg p(f(a))\}$	$[5, 2, \mu = \{x/f(a)\}]$
(7)	$\{\neg p(a)\}$	$[6, 2, \mu = \{x/a\}]$
(8)	$\square$	$[7, 1, \mu = \{\}]$

Oder kürzer durch Selbstresolution:

(1)	$\{p(a)\}$	
(2)	$\{\neg p(x), p(f(x))\}$	
(3)	$\{\neg p(f(f(f(f(a)))))\}$	
(4)	$\{\neg p(y), p(f(f(y)))\}$	$[2, 2, \mu = \{x/f(y)\}]$
(5)	$\{\neg p(z), p(f(f(f(f(z)))))\}$	$[4, 4, \mu = \{y/f(f(z))\}]$
(6)	$\{\neg p(a)\}$	$[3, 5, \mu = \{z/a\}]$
(7)	$\square$	$[1, 6, \mu = \{\}]$

Zu Aufgabe 3

Ein geschlossenes Tableau zu der Formel

$$1\ \forall y \forall x \forall z\big((p(x,z) \rightarrow p(y,z)) \rightarrow q(x,y)\big) \wedge \neg\exists y \forall x (q(x,x) \vee r(y))$$

ist:

$$1\ (\forall y.\forall x.\forall z.((p(x,z) \rightarrow p(y,z)) \rightarrow q(x,y)) \wedge \neg\exists y.\forall x.(q(x,x) \vee r(y)))\ {}_{1}$$

$$1\ \forall y.\forall x.\forall z.((p(x,z) \rightarrow p(y,z)) \rightarrow q(x,y))\ {}_{2[\alpha(1)]}$$

$$1\ \neg\exists y.\forall x.(q(x,x) \vee r(y))\ {}_{3[\alpha(1)]}$$

$$0\ \exists y.\forall x.(q(x,x) \vee r(y))\ {}_{4[\alpha(3)]}$$

$$0\ \forall x.(q(x,x) \vee r(X_1))\ {}_{5[\gamma(4)]}$$

$$0\ (q(sk_1(X_1), sk_1(X_1)) \vee r(X_1))\ {}_{6[\delta(5)]}$$

$$0\ q(sk_1(X_1), sk_1(X_1))\ {}_{7[\alpha(6)]}$$

$$0\ r(X_1)\ {}_{8[\alpha(6)]}$$

$$1\ \forall x.\forall z.((p(x,z) \rightarrow p(X_2^*, z)) \rightarrow q(x, X_2^*))\ {}_{9[\gamma(2)]}$$

$$1\ \forall z.((p(X_3^*, z) \rightarrow p(X_2^*, z)) \rightarrow q(X_3^*, X_2^*))\ {}_{10[\gamma(9)]}$$

$$1\ ((p(X_3^*, X_4) \rightarrow p(X_2^*, X_4)) \rightarrow q(X_3^*, X_2^*))\ {}_{11[\gamma(10)]}$$

Linker Zweig:

$$0\ (p(X_3^*, X_4) \rightarrow p(X_2^*, X_4))\ {}_{12[\beta(11)]}$$

$$1\ p(X_3^*, X_4)\ {}_{14[\alpha(12)]}$$

$$0\ p(X_2^*, X_4)\ {}_{15[\alpha(12)]}$$

$$*_{[14,15]}$$

Rechter Zweig:

$$1\ q(X_3^*, X_2^*)\ {}_{13[\beta(11)]}$$

$$*_{[7,13]}$$

Die schließende Substitution ist dabei: $\{X2 = sk1(X1), X3 = sk1(X1)\}$

Zu Aufgabe 4

Die Formalisierung der Regeln ergibt:

1. Wenn ein Mitglied A ein Mitglied B rasiert – dabei spielt es keine Rolle, ob A ungleich B ist – dann rasieren alle Mitglieder auch A.

$$A_1 \equiv \forall x \forall y \ ((m(x) \land m(y) \land r(x,y)) \to \forall z \ (m(z) \to r(z,x)))$$

2. Vier der Mitglieder sind: Guido, Lorenzo, Petrucio und Cesare.

$$A_2 \equiv m(g) \land m(l) \land m(p) \land m(c)$$

3. Guido rasiert Cesare.

$$A_3 \equiv r(g,c)$$

4. Petrucio rasiert Lorenzo.

$$C \equiv r(p,l)$$

Zu beweisen ist: $\{A_1, A_2, A_3\} \models C$. Um dies mit Hilfe des Tableaukalküls nachzuweisen, zeigen wir $\{A_1, A_2, A_3\} \cup \neg C \vdash \mathbf{0}$

Abbildung 1 zeigt ein Tableau für $\{A_1, A_2, A_3\} \cup \neg C$.

Das Tableau aus Abb. 1 ist noch nicht geschlossen (damit die freien Variablen sichtbar bleiben). Durch die Substitution

$$\mu = \{X_1/g, X_2/c, X_3/l, X_4/l, X_5/g, X_6/p\}$$

kann es aber geschlossen werden.

$$1\ \forall x.\forall y.((m(x) \wedge (m(y) \wedge r(x,y))) \rightarrow \forall z.(m(z) \rightarrow r(z,x)))\ {}_{1}$$

$$1\ (m(g) \wedge (m(l) \wedge (m(p) \wedge m(c))))\ {}_{2}$$

$$1\ r(g,c)\ {}_{3}$$

$$0\ r(p,l)\ {}_{4}$$

$$1\ m(g)\ {}_{5[\alpha(2)]}$$

$$1\ (m(l) \wedge (m(p) \wedge m(c)))\ {}_{6[\alpha(2)]}$$

$$1\ m(l)\ {}_{7[\alpha(6)]}$$

$$1\ (m(p) \wedge m(c))\ {}_{8[\alpha(6)]}$$

$$1\ m(p)\ {}_{9[\alpha(8)]}$$

$$1\ m(c)\ {}_{10[\alpha(8)]}$$

$$1\ \forall y.((m(X_1) \wedge (m(y) \wedge r(X_1,y))) \rightarrow \forall z.(m(z) \rightarrow r(z,X_1)))\ {}_{11[\gamma(1)]}$$

$$1\ ((m(X_1) \wedge (m(X_2) \wedge r(X_1,X_2))) \rightarrow \forall z.(m(z) \rightarrow r(z,X_1)))\ {}_{12[\gamma(11)]}$$

$$0\ (m(X_1) \wedge (m(X_2) \wedge r(X_1,X_2)))\ {}_{13[\beta(12)]} \qquad 1\ \forall z.(m(z) \rightarrow r(z,X_1))\ {}_{14[\beta(12)]}$$

$$0\ m(X_1)\ {}_{15[\beta(13)]} \quad 0\ (m(X_2) \wedge r(X_1,X_2))\ {}_{16[\beta(13)]} \qquad 1\ (m(X_3) \rightarrow r(X_3,X_1))\ {}_{19[\gamma(14)]}$$

$$0\ m(X_2)\ {}_{17[\beta(16)]} \quad 0\ r(X_1,X_2)\ {}_{18[\beta(16)]} \quad 0\ m(X_3)\ {}_{20[\beta(19)]} \quad 1\ r(X_3,X_1)\ {}_{21[\beta(19)]}$$

$$1\ \forall y.((m(X_4) \wedge (m(y) \wedge r(X_4,y))) \rightarrow \forall z.(m(z) \rightarrow r(z,X_4)))\ {}_{22[\gamma(1)]}$$

$$1\ ((m(X_4) \wedge (m(X_5) \wedge r(X_4,X_5))) \rightarrow \forall z.(m(z) \rightarrow r(z,X_4)))\ {}_{23[\gamma(22)]}$$

$$0\ (m(X_4) \wedge (m(X_5) \wedge r(X_4,X_5)))\ {}_{24[\beta(23)]} \quad 1\ \forall z.(m(z) \rightarrow r(z,X_4))\ {}_{25[\beta(23)]}$$

$$0\ m(X_4)\ {}_{26[\beta(24)]} \quad 0\ (m(X_5) \wedge r(X_4,X_5))\ {}_{27[\beta(24)]} \quad 1\ (m(X_6) \rightarrow r(X_6,X_4))\ {}_{30[\gamma(25)]}$$

$$0\ m(X_5)\ {}_{28[\beta(27)]} \quad 0\ r(X_4,X_5)\ {}_{29[\beta(27)]} \quad 0\ m(X_6)\ {}_{31[\beta(30)]} \quad 1\ r(X_6,X_4)\ {}_{32[\beta(30)]}$$

Abbildung 1: Lösung zu Aufgabe 4