Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Thorsten Bormer

Formale Systeme, WS 2010/2011

Lösungen zu Übungsblatt 9

Dieses Blatt wurde in der Übung am 21.01.2011 besprochen.

Zu Aufgabe 1

val bezeichne im Folgenden die Auswertung bzgl. einer beliebig aber fest gewählten Interpretation (und Variablenbelegung).

(a) Sei $\phi' = \phi[\psi \leftarrow \mathbf{1}]$. Zu zeigen ist:

$$\mathrm{val}(\bigwedge \Gamma \wedge \psi \to \phi' \vee \bigvee \Delta) = \mathrm{val}(\bigwedge \Gamma \wedge \psi \to \phi \vee \bigvee \Delta)$$

Beide Seiten evaluieren zu W, wenn eine Formel aus $\Gamma \cup \{\psi\}$ zu F evaluiert. Sei also $\mathrm{val}(\psi) = \mathrm{val}(\gamma) = W$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Wenn eine Formel $\delta \in \Delta$ zu W evaluiert, sind wieder beide Seiten der obigen Gleichung W. Sei also $\mathrm{val}(\delta) = F$ für alle $\delta \in \Delta$.

Das ist nun der entscheidende Punkt, an dem sich beide Sequenzen unterscheiden können. Wir wissen bereits, dass $\mathrm{val}(\psi) = W = \mathrm{val}(\mathbf{1})$. Mittels einfacher struktureller Induktion (hier nicht ausgeführt) kann man nun zeigen, dass alle Unterformeln von ϕ und ϕ' (insbesondere ψ und $\mathbf{1}$) identisch ausgewertet werden. □

(b) Sei ϕ eine beliebige Formel. Zu zeigen ist:

$$\begin{array}{l}[1]\ \mathrm{val}(\bigwedge \Gamma \wedge \phi \to \bigvee \Delta) = W \text{ und} \\ [2]\ \mathrm{val}(\bigwedge \Gamma \to \phi \vee \bigvee \Delta) = W\end{array} \quad \text{gdw.} \quad [3]\ \mathrm{val}(\underbrace{\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta}_{:=\sigma}) = W$$

Wir machen eine Fallunterscheidung nach $\mathrm{val}(\phi)$:

Sei zunächst $\mathrm{val}(\phi) = W$. Dann ist [2] sicher erfüllt. [1] wird ausgewertet wie [3], weil W bzgl. „und“ neutral ist. Wenn $\mathrm{val}(\phi) = F$ ist, dann ist [1] sicher erfüllt („ex falso quod libet“). [2] wird ausgewertet wie [3], weil F neutral ist für „oder“.

Das bedeutet, das unabhägig davon, wie ϕ ausgewertet wird, immer eine Sequenz der Prämisse genauso wie die Conclusio ausgewertet wird. □

Zu Aufgabe 2

(a) Diese Lösung steht in Form der KeY-Beweisdatei `blatt9-aufg2.key.proof` auf den Vorlesungsseiten zur Verfügung.

(b) Eine Interpretation von Σ_N, die diese Aussage nicht erfüllt, ist z.B. (D_2, I_2):

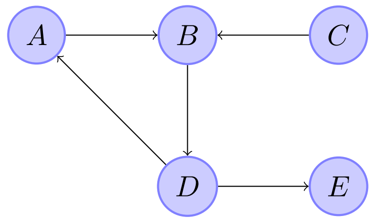
$$D_2 = \{a, b, c\},\ I_2(s)(a) = I_2(s)(b) = I_2(s)(c) = I_2(O) = a,\ I_2(+)(x, y) = \begin{cases} b & \text{wenn } (x, y) = (b, c) \\ c & \text{wenn } (x, y) = (c, b) \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

Offensichtlich ist $c +_{I_2} b = b +_{I_2} c$ hier nicht erfüllt. Aber sind die Vorbedingungen erfüllt?

Ja. Es gilt schließlich für eine bel. Var-Belegung β, dass $\mathrm{val}_{I_2,\beta}(x + s(y)) = \beta(x) +_{I_2} I_2(s)(\beta(y)) = \beta(x) +_{I_2} a = a = \mathrm{val}_{I_2,\beta}(s(x + y))$. Analog für $\mathrm{val}_{I_2,\beta}(s(x) + y) = \mathrm{val}_{I_2,\beta}(s(x + y))$.

Zu Aufgabe 3

$\succ = \{(a,b),(b,d),(c,b),(d,a),(d,e)\}$



(a)

$$\begin{aligned}\text{Die transitive Hülle } \overset{+}{\to} = \{&(a,a),(a,b),(a,d),(a,e),\\ &(b,a),(b,b),(b,d),(b,e),\\ &(c,a),(c,b),(c,d),(c,e),\\ &(d,a),(d,b),(d,d),(d,e)\}\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Die reflexive, transitive Hülle } \to = \{&(a,a),(a,b),(a,d),(a,e),\\ &(b,a),(b,b),(b,d),(b,e),\\ &(c,a),(c,b),\boldsymbol{(c,c)},(c,d),(c,e),\\ &(d,a),(d,b),(d,d),(d,e),\\ &\boldsymbol{(e,e)}\}\ .\end{aligned}$$

$$\text{Die reflexive, transitive, symmetrische Hülle } \leftrightarrow = \{a,b,c,d,e\} \times \{a,b,c,d,e\}\ .$$

(b) Die Knoten a, b, c, e haben nicht mehr als einen Nachfolger bzgl. $\succ$: an diesen Stellen ist somit keine Divergenz möglich.

Der Knoten d hat zwei unmittelbare Nachfolger: a und e. Wegen $a \overset{+}{\to} e$ (s.o.) ist $\succ$ lokal konfluent.

Ebenfalls ist $\succ$ konfluent, da von allen Knoten aus, die von d erreichbar sind (a, b, d, e), der Knoten e erreichbar ist.

(Nota bene: Der Satz, dass jedes noethersche und lokal konfluente Reduktionssystem konfluent ist, ist hier nicht anwendbar, da die Relation nicht noethersch ist.)

(c) Wir fügen einen neuen Knoten f, sowie das Paar (a, f) hinzu. Die einzige neue Divergenz ist $f \prec a \succ b$. Wegen $b \overset{+}{\to} a \overset{+}{\to} f$ bleibt $\succ$ lokal konfluent. Die neue Relation ist aber nicht konfluent, da $b \overset{+}{\to} e$ gilt, und weder f noch e Nachfolger bzgl. $\succ$ haben.

Zu Aufgabe 4

Betrachten wir zunächst nur $(N, \succ)$

(a) Es gilt:

$$6 \succ 2,\ \ 6 \succ 3$$

Aber 2 und 3 sind irreduzible Elemente, weil sie keine echten Teiler größer 1 haben. Also ist das Reduktionssystem **nicht** lokal konfluent.

(b) … und damit natürlich auch nicht konfluent.

(c) Aus $n \succ m$ folgt, dass $n > m$. In $\mathbb{N}$ kann es aber keine unendliche absteigende Kette geben ($(\mathbb{N}, >)$ ist noethersch), also ist $(N, \succ)$ noethersch.

(d) Die irreduziblen Elemente sind gerade die natürlichen Zahlen, die keine natürlichen Teiler haben außer 1 und sich selbst, also die Primzahlen.

Hier fällt der Begriff irreduzibel mit dem aus der Algebra/Zahlentheorie zusammen.

Desweiteren nun die Betrachtung für $(N', \succ)$: 1 ist Teiler jeder positiven natürlichen Zahl, also gilt, dass: $n \succ 1$ für alle $n \in N'$.

(a) folgt aus (b).

(b) Sei $n \succ m_1$ und $n \succ m_2$. Dann ist wegen $m_1 \succ 1$ und $m_2 \succ 1$ die Konfluenz gegeben.

(c) Das Argument von oben greift auch hier.

(d) 1 ist das einzig irreduzible Element.