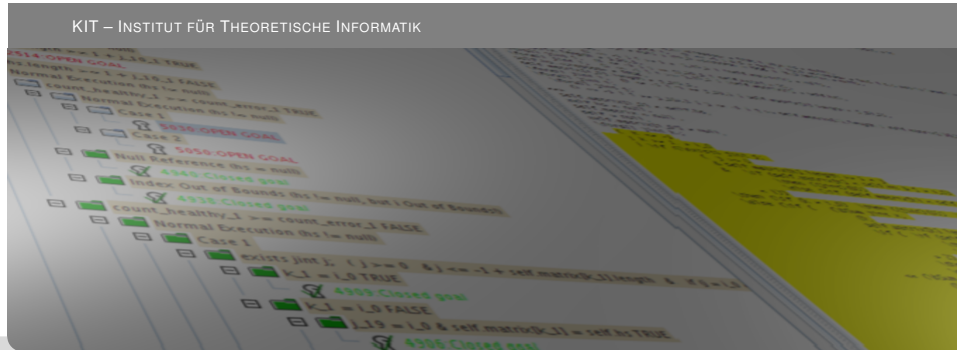


Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2014/2015

Aussagenlogik: Syntax und Semantik

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Seien A, B aussagenlogische Formeln mit

$$\models A \rightarrow B$$

dann (und genau dann) gibt es eine Formel C mit

$$\models A \rightarrow C \quad \text{und} \quad \models C \rightarrow B,$$

so dass in C nur solche aussagenlogischen Atome $P \in \Sigma$ vorkommen, die sowohl in A als auch in B vorkommen.

Das Craigsche Interpolationslemma

Einfaches Beispiel

- ▶ $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_1 \vee P_3$ ist eine Tautologie.

Einfaches Beispiel

- ▶ $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_1 \vee P_3$ ist eine Tautologie.
- ▶ Ebenso $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_1$.

Einfaches Beispiel

- ▶ $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_1 \vee P_3$ ist eine Tautologie.
- ▶ Ebenso $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_1$.
- ▶ Ebenso $P_1 \rightarrow P_1 \vee P_3$.

Einfaches Beispiel

- ▶ $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_1 \vee P_3$ ist eine Tautologie.
- ▶ Ebenso $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_1$.
- ▶ Ebenso $P_1 \rightarrow P_1 \vee P_3$.
- ▶ Also: P_1 ist eine Interpolante für $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_1 \vee P_3$.

Seien P_1, \dots, P_n alle in A vorkommenden aussagenlogischen Atome, die nicht in B vorkommen.

Seien P_1, \dots, P_n alle in A vorkommenden aussagenlogischen Atome, die nicht in B vorkommen.

Für Konstanten $c_i \in \{1, 0\}$ bezeichnen wir mit $A[c_1, \dots, c_n]$ die Formeln, die aus A hervorgeht, indem P_i durch c_i ersetzt wird für alle $1 \leq i \leq n$.

Seien P_1, \dots, P_n alle in A vorkommenden aussagenlogischen Atome, die nicht in B vorkommen.

Für Konstanten $c_i \in \{1, 0\}$ bezeichnen wir mit $A[c_1, \dots, c_n]$ die Formeln, die aus A hervorgeht, indem P_i durch c_i ersetzt wird für alle $1 \leq i \leq n$.

Wir setzen

$$C \equiv \bigvee_{(c_1, \dots, c_n) \in \{1, 0\}^n} A[c_1, \dots, c_n]$$

Seien P_1, \dots, P_n alle in A vorkommenden aussagenlogischen Atome, die nicht in B vorkommen.

Für Konstanten $c_i \in \{1, 0\}$ bezeichnen wir mit $A[c_1, \dots, c_n]$ die Formeln, die aus A hervorgeht, indem P_i durch c_i ersetzt wird für alle $1 \leq i \leq n$.

Wir setzen

$$C \equiv \bigvee_{(c_1, \dots, c_n) \in \{1, 0\}^n} A[c_1, \dots, c_n]$$

Beweis der Korrektheit der Konstruktion: Siehe Skriptum

Einfaches Beispiel zur Konstruktion von C

- ▶ Betrachte die Tautologie $A \rightarrow B$
mit $A = P_1 \wedge P_2$, $B = P_1 \vee P_3$.

Einfaches Beispiel zur Konstruktion von C

- ▶ Betrachte die Tautologie $A \rightarrow B$
mit $A = P_1 \wedge P_2$, $B = P_1 \vee P_3$.
- ▶ P_2 ist das einzige Atom, das in A , aber nicht in B
vorkommt.

Einfaches Beispiel zur Konstruktion von C

- ▶ Betrachte die Tautologie $A \rightarrow B$
mit $A = P_1 \wedge P_2$, $B = P_1 \vee P_3$.
- ▶ P_2 ist das einzige Atom, das in A , aber nicht in B
vorkommt.
- ▶ $A[1] = P_1 \wedge \mathbf{1} \leftrightarrow P_1$

Einfaches Beispiel zur Konstruktion von C

- ▶ Betrachte die Tautologie $A \rightarrow B$
mit $A = P_1 \wedge P_2$, $B = P_1 \vee P_3$.
- ▶ P_2 ist das einzige Atom, das in A , aber nicht in B
vorkommt.
- ▶ $A[1] = P_1 \wedge \mathbf{1} \leftrightarrow P_1$
- ▶ $A[0] = P_1 \wedge \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{0}$.

Einfaches Beispiel zur Konstruktion von C

- ▶ Betrachte die Tautologie $A \rightarrow B$
mit $A = P_1 \wedge P_2$, $B = P_1 \vee P_3$.
- ▶ P_2 ist das einzige Atom, das in A , aber nicht in B
vorkommt.
- ▶ $A[1] = P_1 \wedge 1 \leftrightarrow P_1$
- ▶ $A[0] = P_1 \wedge 0 \leftrightarrow 0$.
- ▶ $C = A[1] \vee A[0] \leftrightarrow P_1 \vee 0 \leftrightarrow P_1$

Weiteres Beispiel zur Konstruktion von C

- ▶ Sei $A \rightarrow B$

$$A = (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$$

$$B = \neg((\neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4) \wedge \neg P_4)$$

Weiteres Beispiel zur Konstruktion von C

- ▶ Sei $A \rightarrow B$

$$A = (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$$

$$B = \neg((\neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4) \wedge \neg P_4)$$

- ▶ $A \leftrightarrow P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$ und $B \leftrightarrow \neg P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4$

Weiteres Beispiel zur Konstruktion von C

- ▶ Sei $A \rightarrow B$

$$A = (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$$

$$B = \neg((\neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4) \wedge \neg P_4)$$

- ▶ $A \leftrightarrow P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$ und $B \leftrightarrow \neg P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4$
- ▶ $A \rightarrow B$ ist eine Tautologie.

Weiteres Beispiel zur Konstruktion von C

- ▶ Sei $A \rightarrow B$

$$A = (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$$

$$B = \neg((\neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4) \wedge \neg P_4)$$

- ▶ $A \leftrightarrow P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$ und $B \leftrightarrow \neg P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4$
- ▶ $A \rightarrow B$ ist eine Tautologie.
- ▶ P_1 ist einziges Atom in A und nicht in B .

Weiteres Beispiel zur Konstruktion von C

- ▶ Sei $A \rightarrow B$

$$A = (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$$

$$B = \neg((\neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4) \wedge \neg P_4)$$

- ▶ $A \leftrightarrow P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$ und $B \leftrightarrow \neg P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4$

- ▶ $A \rightarrow B$ ist eine Tautologie.

- ▶ P_1 ist einziges Atom in A und nicht in B .

- ▶ $A[1] = (\mathbf{1} \vee \neg P_2) \wedge (\neg \mathbf{1} \vee \neg P_3) \wedge P_2$
 $\leftrightarrow \mathbf{1} \wedge \neg P_3 \wedge P_2$
 $\leftrightarrow \neg P_3 \wedge P_2$

Weiteres Beispiel zur Konstruktion von C

- ▶ Sei $A \rightarrow B$

$$A = (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$$

$$B = \neg((\neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4) \wedge \neg P_4)$$

- ▶ $A \leftrightarrow P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$ und $B \leftrightarrow \neg P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4$

- ▶ $A \rightarrow B$ ist eine Tautologie.

- ▶ P_1 ist einziges Atom in A und nicht in B .

- ▶ $A[1] = (1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg 1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$
 $\leftrightarrow 1 \wedge \neg P_3 \wedge P_2$
 $\leftrightarrow \neg P_3 \wedge P_2$

- ▶ $A[0] = (0 \vee \neg P_2) \wedge (\neg 0 \vee \neg P_3) \wedge P_2$
 $\leftrightarrow \neg P_2 \wedge 1 \wedge P_2$
 $\leftrightarrow 0$

Weiteres Beispiel zur Konstruktion von C

- ▶ Sei $A \rightarrow B$

$$A = (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$$

$$B = \neg((\neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4) \wedge \neg P_4)$$
- ▶ $A \leftrightarrow P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$ und $B \leftrightarrow \neg P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4$
- ▶ $A \rightarrow B$ ist eine Tautologie.
- ▶ P_1 ist einziges Atom in A und nicht in B .
- ▶ $A[1] = (1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg 1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$

$$\leftrightarrow 1 \wedge \neg P_3 \wedge P_2$$

$$\leftrightarrow \neg P_3 \wedge P_2$$
- ▶ $A[0] = (0 \vee \neg P_2) \wedge (\neg 0 \vee \neg P_3) \wedge P_2$

$$\leftrightarrow \neg P_2 \wedge 1 \wedge P_2$$

$$\leftrightarrow 0$$
- ▶ Also $C = (\neg P_3 \wedge P_2) \vee 0 \leftrightarrow \neg P_3 \wedge P_2$
ist eine Interpolante für $A \rightarrow B$.