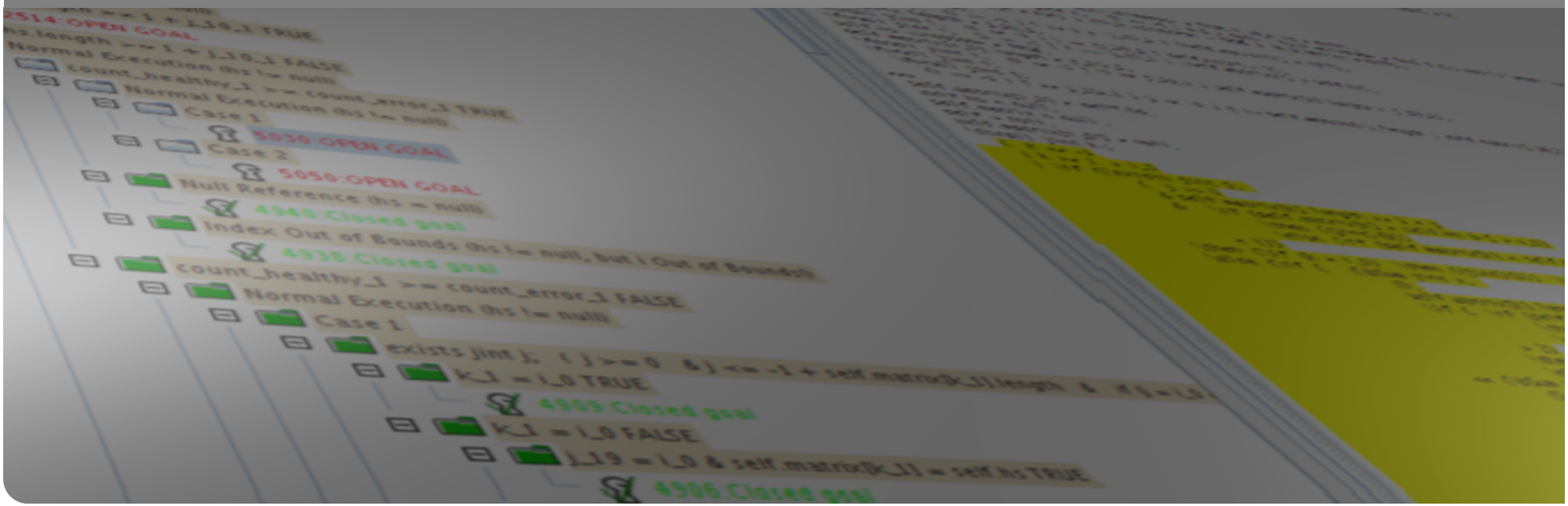
Formale Systeme

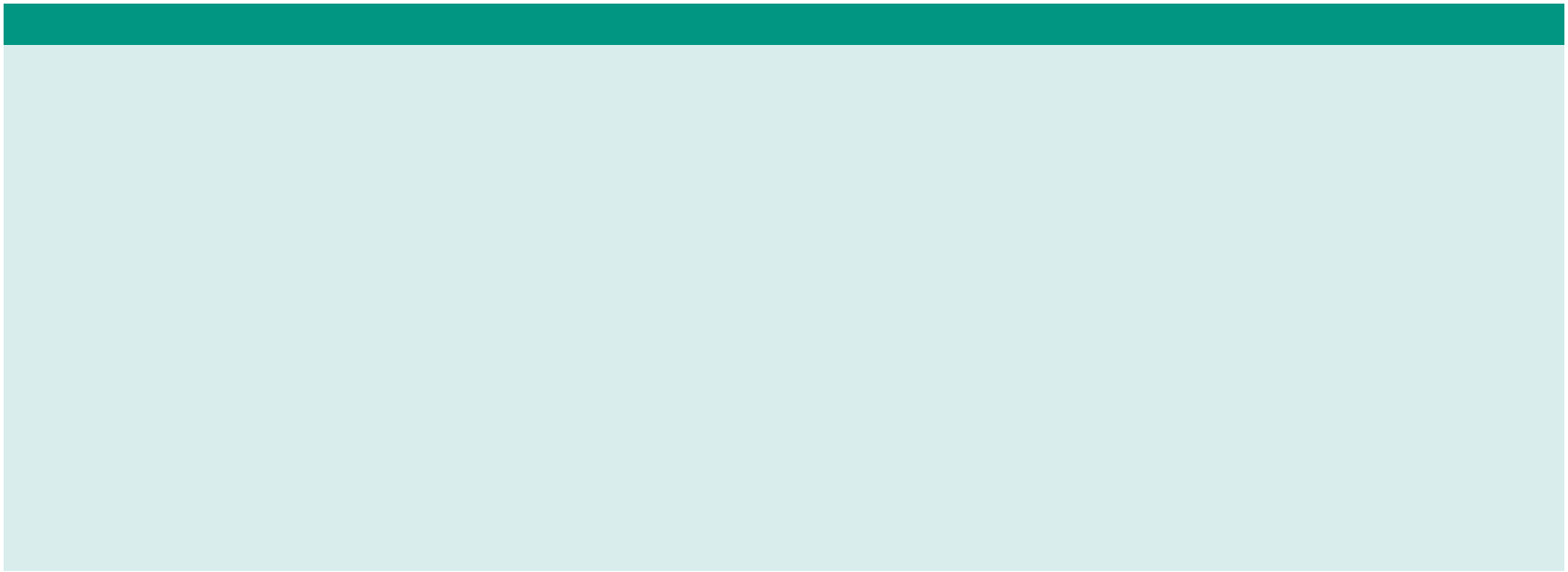
Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2014/2015

Beweistheorie: Motivierendes Beispiel

KIT – Institut für Theoretische Informatik



Wurzeln der Logik



Wurzeln der Logik

- Eine der Wurzeln der modernen Logik ist das Interesse an einer systematischen Analyse des menschlichen Denkens.

Wurzeln der Logik

- Eine der Wurzeln der modernen Logik ist das Interesse an einer systematischen Analyse des menschlichen Denkens.
- Wir fokusieren in dieser Vorlesung auf den Teil des menschlichen Denkens, den man mit *logischem Schließen* enger eingrenzen kann.

Wurzeln der Logik

- Eine der Wurzeln der modernen Logik ist das Interesse an einer systematischen Analyse des menschlichen Denkens.
- Wir fokusieren in dieser Vorlesung auf den Teil des menschlichen Denkens, den man mit *logischem Schließen* enger eingrenzen kann.
- Wir beginnen mit einem Beispiel aus der Alltagslogik.

Beispiel aus der Alltagslogik

Frage

Kann mein Bruder mein Schwager sein?

Beispiel aus der Alltagslogik

Frage

Kann mein Bruder mein Schwager sein?

Beispiel aus der Alltagslogik

Frage

Kann mein Bruder mein Schwager sein?

Antwort

Beispiel aus der Alltagslogik

Frage

Kann mein Bruder mein Schwager sein?

Antwort

1. Nehmen wir mal an, mein Bruder wäre mein Schwager.

Beispiel aus der Alltagslogik

Frage

Kann mein Bruder mein Schwager sein?

Antwort

1. Nehmen wir mal an, mein Bruder wäre mein Schwager.
2. Nach allgemeinem Sprachgebrauch ist ein Schwager der Bruder meiner Frau
   (die andere Schwager-Variante – Mann der Schwester – lassen wir außen vor).

Beispiel aus der Alltagslogik

Frage

Kann mein Bruder mein Schwager sein?

Antwort

1. Nehmen wir mal an, mein Bruder wäre mein Schwager.
2. Nach allgemeinem Sprachgebrauch ist ein Schwager der Bruder meiner Frau
   (die andere Schwager-Variante – Mann der Schwester – lassen wir außen vor).
3. Wenn aber mein Bruder auch der Bruder meiner Frau ist, dann ist meine Frau meine Schwester.

Beispiel aus der Alltagslogik

Frage

Kann mein Bruder mein Schwager sein?

Antwort

1. Nehmen wir mal an, mein Bruder wäre mein Schwager.
2. Nach allgemeinem Sprachgebrauch ist ein Schwager der Bruder meiner Frau
   (die andere Schwager-Variante – Mann der Schwester – lassen wir außen vor).
3. Wenn aber mein Bruder auch der Bruder meiner Frau ist, dann ist meine Frau meine Schwester.
4. Nach deutschem Eherecht darf niemand mit seiner Schwester verheiratet sein.

Beispiel aus der Alltagslogik

Frage

Kann mein Bruder mein Schwager sein?

Antwort

1. Nehmen wir mal an, mein Bruder wäre mein Schwager.
2. Nach allgemeinem Sprachgebrauch ist ein Schwager der Bruder meiner Frau
   (die andere Schwager-Variante – Mann der Schwester – lassen wir außen vor).
3. Wenn aber mein Bruder auch der Bruder meiner Frau ist, dann ist meine Frau meine Schwester.
4. Nach deutschem Eherecht darf niemand mit seiner Schwester verheiratet sein.
5. Also kann mein Bruder nicht mein Schwager sein.

Formalisierung

Konstanten: *Bruno* und *i* (ich)

1. *Bruno* ist mein Bruder. $bruder(Bruno, i)$

Formalisierung

Konstanten: *Bruno* und *i* (ich)

1. *Bruno* ist mein Bruder. $bruder(Bruno, i)$
2. *Bruno* ist mein Schwager. $schwager(Bruno, i)$

Formalisierung

Konstanten: *Bruno* und *i* (ich)

1. *Bruno* ist mein Bruder. $bruder(Bruno, i)$
2. *Bruno* ist mein Schwager. $schwager(Bruno, i)$
3. Wenn jemand mein Schwager ist, dann ist er ein Bruder meiner Frau.
   $\forall x(schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$

Formalisierung

Konstanten: *Bruno* und *i* (ich)

1. *Bruno* ist mein Bruder. $bruder(Bruno, i)$
2. *Bruno* ist mein Schwager. $schwager(Bruno, i)$
3. Wenn jemand mein Schwager ist, dann ist er ein Bruder meiner Frau.
   $\forall x(schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
4. Nach deutschem Eherecht darf niemand mit seiner Schwester verheiratet sein.
   $\forall x(\neg schwester(fr(x), x))$

Formalisierung

Konstanten: *Bruno* und *i* (ich)

1. *Bruno* ist mein Bruder. $bruder(Bruno, i)$
2. *Bruno* ist mein Schwager. $schwager(Bruno, i)$
3. Wenn jemand mein Schwager ist, dann ist er ein Bruder meiner Frau.
   $\forall x(schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
4. Nach deutschem Eherecht darf niemand mit seiner Schwester verheiratet sein.
   $\forall x(\neg schwester(fr(x), x))$
5. *Bruno* ist ein Bruder meiner Frau.
   $bruder(Bruno, fr(i))$

Formalisierung

Konstanten: *Bruno* und *i* (ich)

1. *Bruno* ist mein Bruder. $bruder(Bruno, i)$
2. *Bruno* ist mein Schwager. $schwager(Bruno, i)$
3. Wenn jemand mein Schwager ist, dann ist er ein Bruder meiner Frau.
   $\forall x(schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
4. Nach deutschem Eherecht darf niemand mit seiner Schwester verheiratet sein.
   $\forall x(\neg schwester(fr(x), x))$
5. *Bruno* ist ein Bruder meiner Frau.
   $bruder(Bruno, fr(i))$
6. Meine Frau ist meine Schwester
   $schwester(fr(i), i)$

Formalisierung

Konstanten: *Bruno* und *i* (ich)

1. *Bruno* ist mein Bruder. $bruder(Bruno, i)$
2. *Bruno* ist mein Schwager. $schwager(Bruno, i)$
3. Wenn jemand mein Schwager ist, dann ist er ein Bruder meiner Frau.
   $\forall x(schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
4. Nach deutschem Eherecht darf niemand mit seiner Schwester verheiratet sein.
   $\forall x(\neg schwester(fr(x), x))$
5. *Bruno* ist ein Bruder meiner Frau.
   $bruder(Bruno, fr(i))$
6. Meine Frau ist meine Schwester
   $schwester(fr(i), i)$
7. Widerspruch

Erster Schritt zur Analyse

1. $bruder(Bruno, i)$
2. $schwager(Bruno, i)$
3. $\forall x(schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
4. $\forall x(\neg schwester(fr(x), x))$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$
6. $schwester(fr(i), i)$
7. Widerspruch

Erster Schritt zur Analyse

1. $bruder(Bruno, i)$
2. $schwager(Bruno, i)$
3. $\forall x(schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
4. $\forall x(\neg schwester(fr(x), x))$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$
6. $schwester(fr(i), i)$
7. Widerspruch

1. ist ein Faktum, das im vorliegenden Kontext gilt.

Erster Schritt zur Analyse

1. $bruder(Bruno, i)$
2. $schwager(Bruno, i)$
3. $\forall x(schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
4. $\forall x(\neg schwester(fr(x), x))$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$
6. $schwester(fr(i), i)$
7. Widerspruch

2. ist eine Annahme für die augenblickliche Argumentation.

Erster Schritt zur Analyse

1. $bruder(Bruno, i)$
2. $schwager(Bruno, i)$
3. $\forall x(schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
4. $\forall x(\neg schwester(fr(x), x))$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$
6. $schwester(fr(i), i)$
7. Widerspruch

3. und 4. sind Fakten, die auch außerhalb des vorliegenden Kontexts gelten.

Erster Schritt zur Analyse

1. $bruder(Bruno, i)$
2. $schwager(Bruno, i)$
3. $\forall x(schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
4. $\forall x(\neg schwester(fr(x), x))$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$
6. $schwester(fr(i), i)$
7. Widerspruch

5. ist eine Folgerung aus 2 und 3.
Genauer Analyse folgt gleich.

Erster Schritt zur Analyse

1. $bruder(Bruno, i)$
2. $schwager(Bruno, i)$
3. $\forall x(schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
4. $\forall x(\neg schwester(fr(x), x))$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$
6. $schwester(fr(i), i)$
7. Widerspruch

6. ist wieder eine Folgerung aus den vorangegangenen Aussagen.
Das schauen wir uns danach genauer an.

Erster Schritt zur Analyse

1. $bruder(Bruno, i)$
2. $schwager(Bruno, i)$
3. $\forall x(schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
4. $\forall x(\neg schwester(fr(x), x))$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$
6. $schwester(fr(i), i)$
7. Widerspruch

Zu 7. Aus 4. können wir schließen auf 4a. $\neg schwester(fr(i), i)$.
Das ist ein Schluß vom Allgmeinen auf das Besondere.
4a. und 6. bilden jetzt einen elementaren Widerspruch.

Analyse eines Beweisschritts

Wie kommt man von 2. und 3. zu 5.?

2. $schwager(Bruno, i)$
3. $\forall x(schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$

Analyse eines Beweisschritts

Wie kommt man von 2. und 3. zu 5.?

2. $schwager(Bruno, i)$
3. $\forall x(schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$

vom Allgemeinen zum Besonderen	Modus Ponens

Analyse eines Beweisschritts

Wie kommt man von 2. und 3. zu 5.?

2. $schwager(Bruno, i)$
3. $\forall x(schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$

vom Allgemeinen zum Besonderen	Modus Ponens
$\dfrac{\forall x(schw(x, i) \rightarrow br(x, fr(i)))}{schw(Bruno, i) \rightarrow br(Bruno, fr(i))}$	

Analyse eines Beweisschritts

Wie kommt man von 2. und 3. zu 5.?

2. $schwager(Bruno, i)$
3. $\forall x(schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$

vom Allgemeinen zum Besonderen	Modus Ponens
$\dfrac{\forall x(schw(x, i) \rightarrow br(x, fr(i)))}{schw(Bruno, i) \rightarrow br(Bruno, fr(i))}$	
$\dfrac{\forall x(\phi(x))}{\phi(t)}$ für beliebigen Term t.	

Analyse eines Beweisschritts

Wie kommt man von 2. und 3. zu 5.?

2. $schwager(Bruno, i)$
3. $\forall x(schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$

vom Allgemeinen zum Besonderen	Modus Ponens
$\dfrac{\forall x(schw(x, i) \rightarrow br(x, fr(i)))}{schw(Bruno, i) \rightarrow br(Bruno, fr(i))}$	$\dfrac{schw(Bruno, i) \rightarrow br(Bruno, fr(i)) \quad schw(Bruno, i)}{br(Bruno, fr(i))}$
$\dfrac{\forall x(\phi(x))}{\phi(t)}$ für beliebigen Term t.	

Analyse eines Beweisschritts

Wie kommt man von 2. und 3. zu 5.?

2. $schwager(Bruno, i)$
3. $\forall x(schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$

vom Allgemeinen zum Besonderen	Modus Ponens
$\dfrac{\forall x(schw(x, i) \rightarrow br(x, fr(i)))}{schw(Bruno, i) \rightarrow br(Bruno, fr(i))}$	$\dfrac{schw(Bruno, i) \rightarrow br(Bruno, fr(i)) \quad schw(Bruno, i)}{br(Bruno, fr(i))}$
$\dfrac{\forall x(\phi(x))}{\phi(t)}$ für beliebigen Term t.	$\dfrac{A \rightarrow B \quad A}{B}$

Analyse eines weiteren Beweisschritts

Wie kann man 6 aus 1 und 5 herleiten?

1. $bruder(Bruno, i)$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$
6. $schwester(fr(i), i)$

Analyse eines weiteren Beweisschritts

Wie kann man 6 aus 1 und 5 herleiten?

1. $bruder(Bruno, i)$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$

6. $schwester(fr(i), i)$

Wir haben, offensichtlich, vergessen, ein Faktum in die Formalisierung mit aufzunehmen:

Analyse eines weiteren Beweisschritts

Wie kann man 6 aus 1 und 5 herleiten?

1. $bruder(Bruno, i)$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$

6. $schwester(fr(i), i)$

Wir haben, offensichtlich, vergessen, ein Faktum in die Formalisierung mit aufzunehmen:

7. Wenn jemand gleichzeitig mein Bruder und
   der Bruder einer Frau ist,
   dann ist diese Frau meine Schwester
   $\forall x \forall y \forall z(bruder(x, y) \land bruder(x, z) \land w(z) \rightarrow schwester(z, y))$

Dabei ist $w()$ ein einstellige Prädikat für *weiblich*.

Analyse eines weiteren Beweisschritts

Wie kann man 6 aus 1 und 5 herleiten?

1. $bruder(Bruno, i)$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$

6. $schwester(fr(i), i)$

Wir haben, offensichtlich, vergessen, ein Faktum in die Formalisierung mit aufzunehmen:

7. Wenn jemand gleichzeitig mein Bruder und der Bruder einer Frau ist, dann ist diese Frau meine Schwester
   $\forall x \forall y \forall z(bruder(x, y) \land bruder(x, z) \land w(z) \rightarrow schwester(z, y))$

Dabei ist $w()$ ein einstellige Prädikat für *weiblich*.

Außerdem:

8. $\forall x(w(fr(x)))$

Analyse eines weiteren Beweisschritts

Wie kann man 6. aus 1., 5. und 5a. herleiten?

1. $bruder(Bruno, i)$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$
7. $\forall x \forall y \forall z (bruder(x, y) \land bruder(x, z) \land w(z) \rightarrow schwester(z, y))$
8. $\forall x (w(fr(x)))$

6. $schwester(fr(i), i)$

Analyse eines weiteren Beweisschritts

Wie kann man 6. aus 1., 5. und 5a. herleiten?

1. $bruder(Bruno, i)$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$
7. $\forall x \forall y \forall z (bruder(x, y) \land bruder(x, z) \land w(z) \rightarrow schwester(z, y))$
8. $\forall x (w(fr(x)))$

6. $schwester(fr(i), i)$

Schluß vom Allgemeinen zum Besonderen:

7a. $bruder(Bruno, i) \land bruder(Bruno, fr(i)) \land w(fr(i))$
$\rightarrow schwester(fr(i), i)$

8a. $w(fr(i))$

Analyse eines weiteren Beweisschritts

Wie kann man 6. aus 1., 5. und 5a. herleiten?

1. $bruder(Bruno, i)$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$
7. $\forall x \forall y \forall z (bruder(x, y) \land bruder(x, z) \land w(z) \rightarrow schwester(z, y))$
8. $\forall x (w(fr(x)))$

6. $schwester(fr(i), i)$

Schluß vom Allgemeinen zum Besonderen:

7a. $bruder(Bruno, i) \land bruder(Bruno, fr(i)) \land w(fr(i)) \rightarrow schwester(fr(i), i)$

8a. $w(fr(i))$

Daraus folgt 6. mit modus ponens.

Genau genommen zuerst Zwischenschritt:
Aus Einzelformeln 1, 5, 8a auf Formel $1 \land 5 \land 8a$ *schließen*