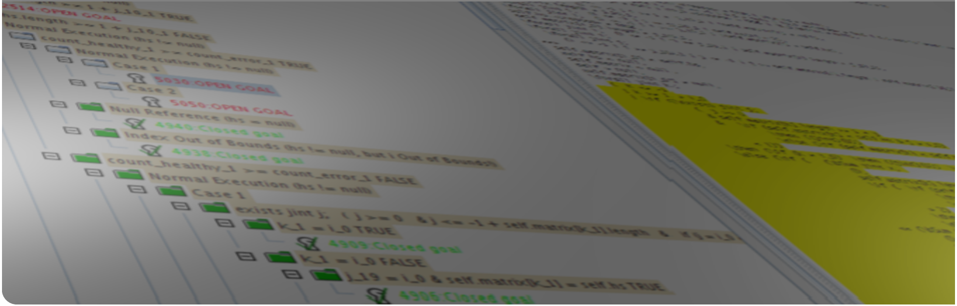
Karlsruhe Institute of Technology

Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2014/2015

Tableaukalkül (ohne Gleichheit)

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Der Tableaukalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit

$$M \models A \quad \Leftrightarrow \quad M \cup \{\neg A\} \vdash_{\mathbf{T}} \mathbf{0}.$$

- Beweis durch Fallunterscheidung
- Top-down-Analyse der gegebenen Formeln

Der Tableaukalkül

Vorteile

- Intuitiver als Resolution
- Formeln müssen nicht in Normalform sein
- Im aussagenlogischen Fall:
  Falls Formelmenge erfüllbar ist (Beweis schlägt fehl), wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

Nachteil

- Mehr als eine Regel

Vorbereitung 1

Definition (Vorzeichenformel Syntax)

Eine **Vorzeichenformel** ist eine Zeichenkette der Gestalt

$$0A \text{ oder } 1A \qquad \text{mit } A \in For0.$$

0, 1 sind neue Sonderzeichen (die Vorzeichen) im Alphabet der Objektsprache.

Definition (Vorzeichenformeln Semantik)

Wir setzen val_I fort auf die Menge aller Vorzeichenformeln durch

$$val_I(0A) = val_I(\neg A),$$

und

$$val_I(1A) = val_I(A).$$

Vorbereitung 2

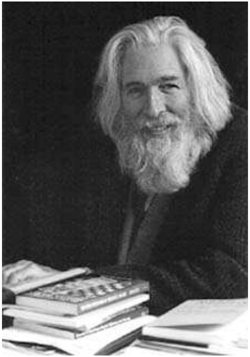
Uniforme Notation

konjunktive Formeln **Typ** α	**disjunktive Formeln** **Typ** β
$1(A \wedge B)$	$0(A \wedge B)$
$0(A \vee B)$	$1(A \vee B)$
$0(A \rightarrow B)$	$1(A \rightarrow B)$
$0\neg A$	
$1\neg A$	

Universelle Formeln **Typ** γ	**existentielle Formeln** **Typ** δ
$1\forall x A(x)$	$1\exists x A(x)$
$0\exists x A(x)$	$0\forall x A(x)$

Universelle Notation

Die universelle Notation wurde eingeführt von



Raymond Smullyan

Uniforme Notation

Zuordnung Formeln / Unterformeln

α	α_1	α_2
$1(A \wedge B)$	$1A$	$1B$
$0(A \vee B)$	$0A$	$0B$
$0(A \rightarrow B)$	$1A$	$0B$
$0\neg A$	$1A$	$1A$
$1\neg A$	$0A$	$0A$

β	β_1	β_2
$0(A \wedge B)$	$0A$	$0B$
$1(A \vee B)$	$1A$	$1B$
$1(A \rightarrow B)$	$0A$	$1B$

γ	γ_1
$1\forall xA$	$1A$
$0\exists xA$	$0A$

δ	δ_1
$1\exists xA$	$1A$
$0\forall xA$	$0A$

Tableaukonstruktion

Tableauregeln

α-Regel $\quad \dfrac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$

β-Regel $\quad \dfrac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$

γ-Regel $\quad \dfrac{\gamma}{\gamma_1(Y)}$ $\quad$ für eine neue Variable Y

δ-Regel $\quad \dfrac{\delta}{\delta_1(f(X_1, \ldots, X_n))}$ $\quad$ f ein neues Funktionssymbol

$X_1, \ldots, X_n$
alle freien Variablen in δ

Tableaukonstruktion

Definition: Tableau

Ein Tableau ist ein binärer Baum, dessen Knoten mit Vorzeichenformeln markiert sind.

Definition: Tableauast

Maximaler Pfad in einem Tableau (von Wurzel zu Blatt)

Tableaukonstruktion

Sei M eine Formelmenge, sei A eine Formel

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten $0A$ besteht,
ist ein Tableau für A über M.

Erweiterung

- T ein Tableau für A über M
- B ein Ast von T
- F eine Formel auf B, die kein Atom ist

T' entstehe durch Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel
Dann ist T' ein Tableau für A über M

Tableaukonstruktion

Voraussetzungsregel

- T ein Tableau für A über M
- F eine Formel in M

T' entstehe durch Erweiterung eines beliebigen Astes durch $1F$
Dann ist T' ein Tableau für A über M

Tableaukonstruktion

Definition: Geschlossener Ast

Ein Ast B eines Tableaus ist geschlossen, wenn

$$1F, 0F \in B$$

Definition: Geschlossenes Tableau

Ein Tableau T ist geschlossen,
wenn es eine kollisionsfreie Substitution σ gibt,
so daß für jeden Ast B von T
der substitutierte Ast $\sigma(B)$ geschlossen ist.

Tableaukonstruktion

Tableaubeweis

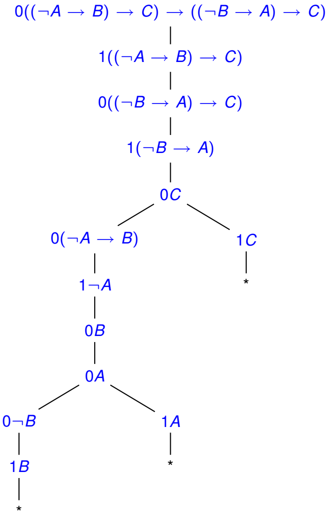
Falls ein geschlossenes Tableau für A über M existiert, so sagen wir

A ist im Tableaukalkül aus dem Voraussetzungen M beweisbar und schreiben

$$M \vdash_T A$$

Ausagenlogisches Beispiel

Ist $((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow C)$ eine Tautologie?



Ein prädikatenlogisches Beispiel

Ist $\forall x\, p(x) \rightarrow \exists y\, p(y)$ eine Tautologie?

$$
\begin{array}{cl}
0\ \forall x\, p(x) \rightarrow \exists y\, p(y) & \text{(Start)} \\
| & \\
1\ \forall x\, p(x) & (\alpha\text{-Regel}) \\
| & \\
0\ \exists y\, p(y) & (\alpha\text{-Regel}) \\
| & \\
1\ p(X) & (\gamma\text{-Regel}) \\
| & \\
0\ p(Y) & (\gamma\text{-Regel})
\end{array}
$$

Ein prädikatenlogisches Beispiel

Ist $\forall x\, p(x) \rightarrow \exists y\, p(y)$ eine Tautologie?

$$
\begin{array}{ll}
0\ \forall x\, p(x) \rightarrow \exists y\, p(y) & \text{(Start)} \\
\quad | & \\
1\ \forall x\, p(x) & (\alpha\text{-Regel}) \\
\quad | & \\
0\ \exists y\, p(y) & (\alpha\text{-Regel}) \\
\quad | & \\
1\ p(X) & (\gamma\text{-Regel}) \\
\quad | & \\
0\ p(Y) & (\gamma\text{-Regel})
\end{array}
\quad
\overset{\sigma =}{\underset{\{Y/X\}}{\Longrightarrow}}
\quad
\begin{array}{c}
0\ \forall x\, p(x) \rightarrow \exists y\, p(y) \\
| \\
1\ \forall x\, p(x) \\
| \\
0\ \exists y\, p(y) \\
| \\
1\ p(X) \\
| \\
0\ p(X)
\end{array}
$$

Anwendung der Abschlußregel.

Ein geschlossenes Tableau

1[]	$0\exists y \forall x p(x, y) \rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$
2[1]	$1\exists y \forall x p(x, y)$
3[1]	$0\forall x \exists y p(x, y)$
4[2]	$1\forall x p(x, a)$
5[3]	$0\exists y p(b, y)$
6[4]	$1 p(X, a)$
7[5]	$0 p(b, Y)$
	geschlossen mit $\sigma(X) = b$ und $\sigma(Y) = a$

Ein offenes Tableau

1[]	$0\forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x p(x, y)$
2[1]	$0\exists y \forall x p(x, y)$
3[1]	$1\forall x \exists y p(x, y)$
4[2]	$0\forall x p(x, Y)$
5[3]	$1\exists y p(X, y)$
6[4]	$0p(f(Y), Y)$
7[5]	$1p(X, g(X))$

$p(f(Y), Y)$ und $p(X, g(X))$ sind nicht unifizierbar
es müßte gelten

$\sigma(X) = \sigma(f(Y))$ und $\sigma(Y) = \sigma(g(X))$

also $\sigma(X) = f(g(\sigma(X)))$

Mehrfache Anwendung der γ-Regel

Beweisaufgabe: $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$

$$1p(0)$$

$$1\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x)))$$

$$0p(s(s(0)))$$

$$1p(X) \rightarrow p(s(X))$$

$$0p(X) \quad 0p(0) \quad 1p(s(X)) \qquad 1p(s(0))$$

$$\sigma(X) = 0 \qquad * \qquad 1p(Y) \rightarrow p(s(Y))$$

$$0p(Y) \quad 0p(s(0)) \quad 1p(s(Y)) \qquad 1p(s(s(0)))$$

$$\sigma(Y) = s(0) \qquad * \qquad *$$

Korrektheit und Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem

Sei M eine Formelmenge, sei A eine Formel

A ist eine logische Folgerung aus M
genau dann, wenn
es einen Tableaubeweis für A über M gibt

In Symbolen:

$$M \models A \Leftrightarrow M \vdash_T A$$

Vorbereitung zum Korrekheitsbeweis

Definition: erfüllbares Tableau

Es seien $A \in For_\Sigma$, $M \subseteq For_\Sigma$.

Ein Tableau T für A über M heißt *erfüllbar*
wenn es eine Interpretation $\mathcal{D}$ über $\overline{\Sigma}$ gibt, mit

- $\mathcal{D}$ ist Modell von M
- zu jeder Variablenbelegung β gibt es einen Pfad π in T mit $val_{\mathcal{D},\beta}(F) = W$ für alle F auf π.

Dabei ist $\overline{\Sigma} = \Sigma \cup \{f \mid f \text{ neues Funktionssymbol in } T\}$.

Plan für den Korrektheitsbeweis

Theorem

Sei $A \in For_\Sigma$, $M \subseteq For_\Sigma$, alle ohne freie Variablen
Wenn es ein geschlossenes Tableau für A über M gibt,
dann ist $M \models A$.

Beweisplan:

T_0	Anfangstableau	nicht erfüllbar	$\Rightarrow$	$M \models A$
$\vdots$				
T_k	Zwischentableau	nicht erfüllbar	K-Lemma	
T_{k+1}	Zwischentableau	nicht erfüllbar		
$\vdots$				
T_n	geschlossenes Tableau	nicht erfüllbar		

Korrektheitsbeweis

Sei $A \in For_\Sigma, M \subseteq For_\Sigma$, alle ohne freie Variablen

Lemma: Anfangstableau

Ist das Anfangstableau für A über M nicht erfüllbar,
so gilt $M \models A$.

Lemma: Endtableau

Jedes geschlossene Tableau für A über M ist unerfüllbar.

Korrektheitsbeweis

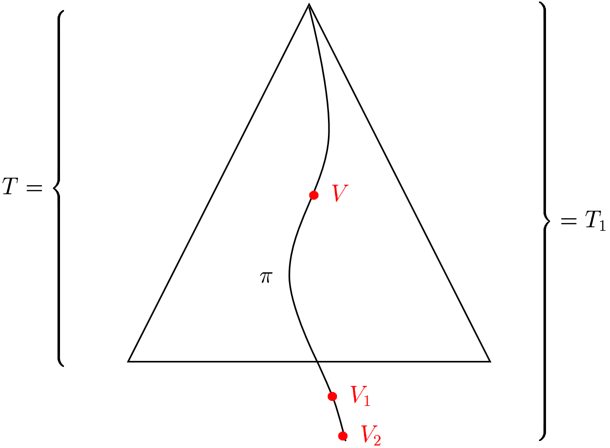
Korrektheitslemma

M sei eine Formelmenge ohne freie Variablen.

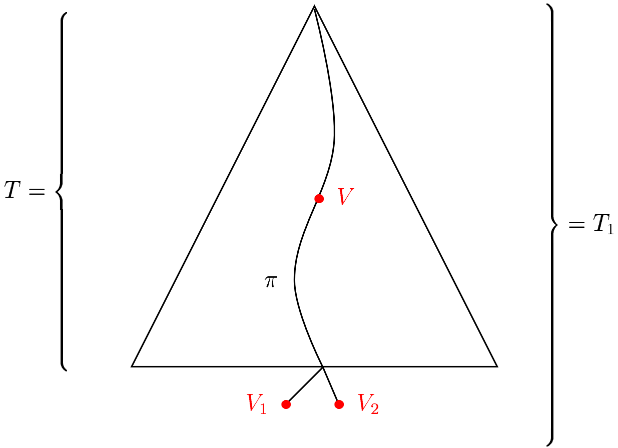
Das Tableau T_1 über M gehe aus T über M durch Anwendung einer Tableauregel hervor.

Ist T erfüllbar, dann ist auch T_1 erfüllbar.

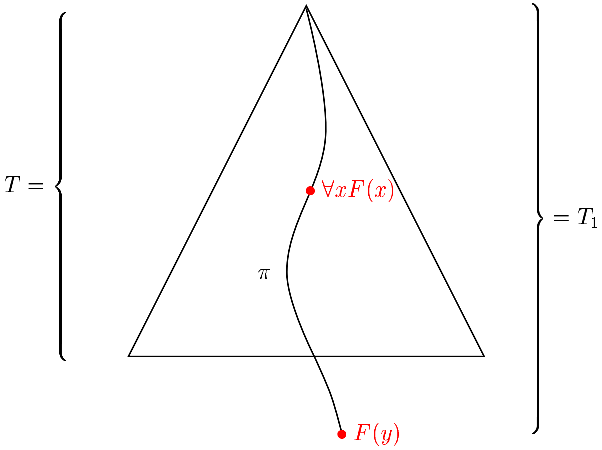
Beweis des Korrektheitslemma, α-Fall



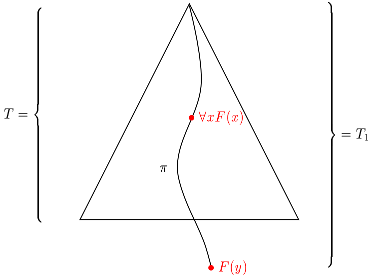
Beweis des Korrektheitslemma, β-Fall



Beweis des Korrektheitslemma, γ-Fall

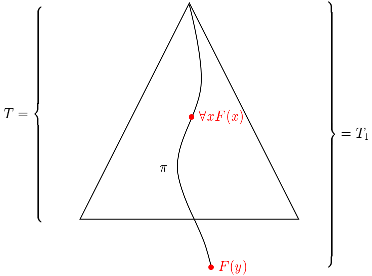


Beweis des Korrektheitslemma, γ-Fall



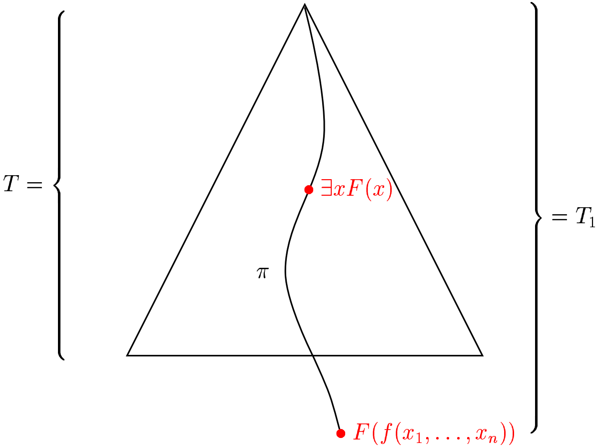
$\mathcal{D}$ sei ein Modell von *T* über *M*. Wir zeigen, daß $\mathcal{D}$ auch Modell von T_1 ist.
Sei β eine Belegung und π_0 ein Pfad in *T* mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$.
Wenn $\pi_0 \neq \pi$, ist π_0 unverändert ein Pfad in T_1, fertig.

Beweis des Korrektheitslemma, γ-Fall



$\mathcal{D}$ sei ein Modell von T über M. Wir zeigen, daß $\mathcal{D}$ auch Modell von T_1 ist.
Sei β eine Belegung und $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi$, i.e. $\pi_0 = \pi$.
Aus $(\mathcal{D}, \beta) \models \forall x F$ folgt insbesondere $(\mathcal{D}, \beta) \models F(y)$, also $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi \cup \{F(y)\}$.

Beweis des Korrektheitslemma, δ-Fall



Beweis des Korrektheitslemma, δ-Fall

Nach Voraussetzung sei $\mathcal{D}$ Modell von T über M.

Wir konstruieren eine Interpretation $\mathcal{D}'$, die sich von $\mathcal{D}$ nur darin unterscheidet, daß dem Funktionszeichen f eine Interpretation $f^{\mathcal{D}'}$ zugeordnet wird.

$$f^{\mathcal{D}'}(d_1, \ldots, d_n) = ?$$

Für $d_1, \ldots, d_n \in D$ und β mit $\beta(x_i) = d_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt entweder

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$$

in diesem Fall gibt es ein $d \in D$ mit

$$(\mathcal{D}, \beta_x^d) \models F(x)$$

oder $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$ gilt nicht. Im letzten Fall wählen wir einen beliebigen Wert $d \in D$.

Beweis des Korrektheitslemma, δ-Fall

(Forts.)

Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{D}'$ Modell von T_1 ist.

Es sei β eine beliebige Belegung bzgl. $\mathcal{D}'$, β ist auch Belegung bzgl. $\mathcal{D}$, da sich der Grundbereich nicht geändert hat.

Es gibt π_0 in T mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$.

Nur der Fall $\pi_0 = \pi$ ist interessant.
Aus $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F(x_1, \ldots, x_n)$ folgt nach Konstruktion von $\mathcal{D}'$ auch

$$(\mathcal{D}', \beta) \models F(f(x_1, \ldots, x_n))$$

.
Da in den restlichen Formeln des Pfades π und in M das Zeichen f nicht vorkommt, erhalten wir insgesamt

$$(\mathcal{D}', \beta) \models \pi \cup \{F(f(x_1, \ldots, x_n))\} \text{ und } (\mathcal{D}', \beta) \models M.$$

Vollständigkeit des Tableaukalküls

1. Version

Theorem

Sei A eine Formel und M eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.

Gilt

$$M \models A$$

dann gibt es ein geschlossenes Tableau für A über M.

Konstruktionsvorschrift

Es sei $t_1, \ldots, t_n, \ldots$ eine Aufzählung aller Grundterme.

Parallel zur Konstruktion einer Folge von Tableaus $\mathcal{T}_i$ wird eine Folge von Grundsubstitutionen σ_i erzeugt.

Entsteht $\mathcal{T}_{i+1}$ aus $\mathcal{T}_i$ durch Anwendung einer γ-Regel mit der Formel F auf dem Pfad π dann ist

$$\sigma_{i+1} = \{X/t_n\} \circ \sigma_i,$$

wobei X die neu eingeführte Variable ist und
es sich um die n-te Anwendung der γ-Regel für F auf π handelt.

Sonst $\sigma_{i+1} = \sigma_i$.

Ein Pfad π im Tableau $\mathcal{T}_i$ wird nicht erweitert, wenn $\sigma_i(\pi)$ abgeschlossen ist.

Vollständigkeit des Tableaukalküls

Konstruktive Version

Theorem

Sei A eine Formel und M eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.

Gilt $$M \models A$$
dann terminiert jedes

- *faire Verfahren,*
- *das mit* $0A$ *und* $\sigma_0 = id$ *beginnt,*
- *und die Konstruktionsvorschrift einhält*

nach endlich vielen Schritten in einem geschlossenen Tableau.

Fairness bedeutet, dass auf jedem Pfad, jede mögliche Regelanwendung auch schließlich stattfindet.
Insbesondere wird auf jedem offenen Pfad jede γ-Formel unbeschränkt oft benutzt und jede Formel aus *M* kommt dran.

Beweisansatz

Details später

Angenommen die fair konstruierte Folge $(\mathcal{T}_0, \sigma_0), \ldots, (\mathcal{T}_n, \sigma_n) \ldots$ terminiert nicht.

Setze $\mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}_i$ und $\sigma = \bigcup_{i \geq 0} \sigma_i$.

$\sigma(\mathcal{T})$ ist ein unendlicher endlich verzweigender Baum.

Nach Königs Lemma gibt es einen unendlichen Pfad π in $\sigma(\mathcal{T})$.

Nach Konstruktion muss π ein offener Pfad sein.

Aus π kann man ein Modell $\mathcal{D}$ ablesen mit $\mathcal{D} \models M$ und $\mathcal{D} \models \neg A$.
Widerspruch zu $M \models A$.

Beweisansatz
Details

Königs Lemma

In jedem unendlichen, endlich verzweigenden Baum existiert ein unendlicher Pfad.

Beweisansatz
Details

Modellexistenz

- Jede Hintikka-Menge besitzt ein Modell
- Jeder offene Ast in einem fairen, abgeschlossenen Tableau ist eine Hintikka- Menge.

Beweisansatz

Hintikka-Menge

Definition

Eine Menge H geschlossenener Vorzeichenformeln über einer Signatur Σ heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (H 1) Gilt für eine α-Formel F, $F \in H$,
  dann auch $F_1 \in H$ und $F_2 \in H$.
- (H 2) Gilt $F \in H$ für eine β-Formel F,
  dann auch $F_1 \in H$ oder $F_2 \in H$.
- (H 3) Gilt $F \in H$ für eine δ-Formel F,
  dann gibt es einen Grundterm t mit $F_1(t) \in H$.
- (H 4) Gilt $F \in H$ für eine γ-Formel F,
  dann gilt $F_1(t) \in H$ für jeden Grundterm t.
- (H 5) Für keine A kommen $1A$ und $0A$ in H vor.

Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik

Theorem

Die folgenden Probleme sind unentscheidbar:

1. *Was ist die maximale Anzahl von γ-Regelanwendungen in einem Tableaubeweis einer prädikatenlogische Formel $F \in For_\Sigma$?*
2. *Ist eine prädikatenlogische Formel $F \in For_\Sigma$ allgemeingültig?*
   Triviale Signaturen Σ ausgenommen.

Rekursionstheoretische Eigenschaften der Prädikatenlogik

Theorem

1. *Die Menge der allgemeingültigen Formeln der Prädikatenlogik ist rekursiv aufzählbar.*
2. *Die Menge der erfüllbaren Formeln der Prädikatenlogik ist nicht rekursiv aufzählbar.*

Allgemeine Tableauregel

$$
\begin{array}{c|c|c}
\multicolumn{3}{c}{\phi} \\
\hline
\psi_{1,1} & \cdots & \psi_{n,1} \\
\vdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \cdots & \vdots \\
\psi_{1,K_1} & \cdots & \psi_{n,k_n}
\end{array}
$$

Um die Teilformeleigenschaft des Tableaukalküls zu gewährleisten, wird gefordert, dass alle Vorzeichenformeln $\psi_{i,j}$ Teilformeln der Vorzeichenformel ϕ sind.

Korrektheit und Vollständigkeit einer Regel

Eine allgemeine Tableauregel

$$
\begin{array}{c|c|c}
\multicolumn{3}{c}{\phi} \\
\hline
\psi_{1,1} & \ldots & \psi_{n,1} \\
\vdots & \ldots & \vdots \\
\vdots & \ldots & \vdots \\
\psi_{1,K_1} & \ldots & \psi_{n,k_n}
\end{array}
$$

heißt vollständig und korrekt, wenn für jede Interpretation I gilt

$val_I(\phi) = W$ gdw es gibt ein i, $1 \leq i \leq n$, so dass für alle j,$1 \leq j \leq k_i$ gilt $val_I(\psi_{i,j}) = W$

Tableauregel für den logischen Äquivalenzoperator

$\leftrightarrow$	W	F
W	W	F
F	F	W

$$\frac{1(A \leftrightarrow B)}{\begin{array}{l|l} 1A & 0A \\ 1B & 0B \end{array}} \qquad \frac{0(A \leftrightarrow B)}{\begin{array}{l|l} 1A & 0A \\ 0B & 1B \end{array}}$$