Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Bernhard Beckert
Thorsten Bormer, Dr. Vladimir Klebanov, Dr. Mattias Ulbrich

Formale Systeme WS 2014/2015

Musterlösung zum Zwischentest 2 am 12.12.2014

Ich versichere, die Aufgaben selbständig und ohne Hilfsmittel zu bearbeiten.

____
Unterschrift

______________________________________ ______________________________
Name (Druckbuchstaben) Matrikelnummer

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen. Sie können jedoch nicht weniger als 0 Punkte für diese Aufgabe erhalten. Wenn Sie bei einer Frage kein Kreuz setzen, so wird diese nicht gewertet.

		Richtig	Falsch
1.	Es gibt eine Formel F der Prädikatenlogik, deren Skolemnormalform F_{sko} äquivalent zu F ist.	X	
2.	Seien t_1, t_2, t_3 beliebige Terme über einer Signatur, die wenigstens ein Funktionszeichen enthält. Dann gilt: Wenn sowohl t_1 und t_2 als auch t_2 und t_3 unifizierbar sind, so sind auch t_1 und t_3 unifizierbar.		X
3.	Jede *unendliche* unerfüllbare Menge aussagenlogischer Formeln hat eine *endliche* unerfüllbare Teilmenge.	X	

Zur Begründung:

1. $F = \forall x p(x)$ und $F_{sko} = F$ sind offensichtlich äquivalent. Selbst wenn skolemisiert wird, können die Formeln äquivalent sein, wie $F' = \exists x(p(x) \vee \neg p(x))$ und $F'_{sko} = p(c) \vee \neg p(c)$ beweist.
2. Gegenbeispiel: $t_1 = f(a)$, $t_2 = f(x)$, $t_3 = f(b)$
3. Dies ist die Aussage des Endlichkeitssatzes der Aussagenlogik.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Formalisieren Sie folgende Aussagen in Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit über der folgenden Signatur: $0, 1, +, *$ (Funktionssymbole) und $<$ (Prädikatsymbol). Dabei haben die Symbole die übliche Bedeutung und die Grundmenge der Elemente, über die quantifiziert wird, bestehe (nur) aus Zahlen.

1. Es gibt zwei Zahlen, beide verschieden von Null, deren Produkt aber Null ist.

$$\exists x \exists y\, (\neg x \doteq 0 \wedge \neg y \doteq 0 \wedge x * y \doteq 0)$$

2. Das Quadrat jeder positiven Zahl ist positiv.

$\forall x\,(0 < x \to 0 < x * x)$

3. Es gibt mindestens drei verschiedene Zahlen.

$\exists x \exists y \exists z\,(\neg x \doteq y \wedge \neg z \doteq x \wedge \neg z \doteq y)$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sei eine Signatur, die als Funktionssymbole f, g, h, k, und die Konstantensymbole c, d enthält; x, y und z sind Variablen.

Geben Sie für die folgenden Formelpaare jeweils an, ob sie unifizierbar sind. Wenn ja, geben Sie einen allgemeinsten Unifikator sowie das Ergebnis der Unifikation an.

a. $h(d, y)$ und
$h(y, c)$

Unifizierbar ☐ Nicht unifizierbar ☒

Falls unifizierbar: Allgemeinster Unifikator Ergebnis der Unifikation:

☐ ☐

b. $f(y, g(h(c, x), x))$ und
$f(x, g(z, k(y)))$

Unifizierbar ☐ Nicht unifizierbar ☒

Falls unifizierbar: Allgemeinster Unifikator Ergebnis der Unifikation:

☐ ☐

c. $g(k(g(k(c), x)), y)$ und
$g(k(g(y, g(z, c))), k(z))$

Unifizierbar ☒ Nicht unifizierbar ☐

Falls unifizierbar: Allgemeinster Unifikator Ergebnis der Unifikation:

$\boxed{\{x/g(c,c),\ y/k(c),\ z/c\}}$ $\boxed{g(k(g(k(c), g(c,c))), k(c))}$